《思维导图伴你学》 考点思维导图——初中数学

初中数学

数与式

相关概念

- 数轴
  - 定义：规定了原点、正方向和单位长度的直线
  - 性质：数轴上的点和所有实数是一一对应的；在数轴上表示两个数的点，右边的点所表示的数大
- 相反数
  - 定义：实数a和$-a$互为相反数
  - 性质：a,b互为相反数$a+b=0$
- 倒数
  - 定义：非零实数a和$\frac{1}{a}$互为倒数.
  - 性质：a,b互为倒数 $ab=1$
- 绝对值
  - 定义：实数a的绝对值指数轴上表示数a的点到原点的距离，记为$|a|$
  - 性质：$|a|=\begin{cases}a & (a>0)\\ 0 & (a=0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$
- 平方根
  - 定义：如果$x^2=a$，则x叫做a的平方根，记为$x=\pm\sqrt{a}\ (a\geqslant 0)$
  - 性质：正数的平方根有两个，它们互为相反数；0的平方根和算术平方根都是0；负数没有平方根
- 算术平方根
  - 定义：正数a的正的平方根，记为$\sqrt{a}$
  - 性质：0的算术平方根是0；算术平方根永远非负
- 立方根
  - 定义：如果$x^3=a$，则x叫做a的立方根，用符号$\sqrt[3]{a}$表示
  - 性质：正数有一个正的立方根；负数有一个负的立方根；0的立方根仍是0
- 科学记数法、近似数和有效数字

运算

- 有理数加法与减法、乘法与除法的相互转化：$a-b=a+(-b)$；$a\div b=a\cdot\frac{1}{b}\ (b\neq 0)$
- 有理数运算法则：加法、减法、乘法、除法法则
- 有理数的乘方：$\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个a}=a^n$
- 运算顺序：先算乘方、开方，再算乘、除，最后算加、减（如果有括号，先算括号里的；同级运算从左向右依次进行）
- 运算律：$a+b=b+a$；$(a+b)+c=a+(b+c)$；$ab=ba$；$(ab)c=a(bc)$；$a(b+c)=ab+ac$（利用运算律可以改变运算顺序）
- 用科学记数法表示数：$a\times10^n$（其中$1\leqslant|a|<10$，n为整数）

整式

- 概念：单项式和多项式的统称
  - 单项式：数字与字母的积
  - 多项式：几个单项式的和
  - 同类项：所含字母相同，相同字母的指数也相同的项
- 运算
  - 整式的加减：先化简，再合并同类项
  - 整式的乘除
    - 整数幂的运算性质：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；$(a^m)^n=a^{mn}$；$(ab)^m=a^mb^m$；$a^m\div a^n=a^{m-n}$（$a\neq0$，m,n均为整数）
    - 整式的乘法
      - 单项式×多项式：$m(a+b+c)=ma+mb+ma$
      - 多项式×多项式：$(a+b)(m+n)=am+an+bm+bn$；$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
      - 乘法公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$；$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$
    - 整式的除法：零和负整数指数 $a^{-p}=\frac{1}{a^p}$；$a^0=1$（$a\neq0$，p为正整数）
- 因式分解
  - 定义：把一个多项式化成几个整式的积的形式
  - 方法
    1. 提公因式法 $ma+mb+mc=m(a+b+c)$
    2. 公式法 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$；$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$
    3. 分组分解法
    4. 十字相乘法 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
  - 步骤
    1. 如果多项式的各项有公因式，那么先提公因式
    2. 如果各项没有公因式，那么可以尝试运用公式来分解
    3. 如果用上述方法不能分解，那么可以尝试用分组或十字相乘法来分解
    4. 分解因式要各种方法反复尝试，分解到每一个多项式因式都不能再分解为止

分式

- 概念：形如$\frac{A}{B}$的式子叫做分式（其中，A、B均为整式，且$B\neq0$）
- 基本性质：$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M}$，$\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$（其中$M$为整式，且$M\neq0$）
- 运算
  - 1.加减法：$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$，$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$
  - 2.乘法：$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$
  - 3.除法：$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$
  - 4.乘方：$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$（$n$为正整数）

二次根式

- 概念：式子$\sqrt{a}\ (a\geqslant0)$叫做二次根式
  - 最简二次根式：1.被开方数不含分母；2.被开方数中不含能开得尽方的因数或因式
  - 同类二次根式：化成最简二次根式以后，被开方数相同的二次根式
- 性质：$\sqrt{a}\geqslant0\ (a\geqslant0)$；$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant0,\ b\geqslant0)$；$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant0)$；$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant0,\ b>0)$；$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$
- 分母有理化：常用的有理化因式 1. $\sqrt{a}$与$\sqrt{a}$ 2. $a+\sqrt{b}$与$a-\sqrt{b}$ 3. $a+b\sqrt{c}$与$a-b\sqrt{c}$ 4. $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$与$a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$
- 运算
  - 加减：先化成最简二次根式，再合并同类二次根式
  - 乘除：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant0,\ b\geqslant0)$；$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (a\geqslant0,\ b>0)$

方程（组）与不等式（组）

方程（组）

- 方程
  - 一元一次方程 解法：去分母；去括号；移项；合并同类项，化为最简方程 $ax=b\ (a\neq0)$；解出 $x=\frac{b}{a}$
  - 一元二次方程
    - 一般形式：$ax^2+bx+c=0$，（a,b,c为常数，$a\neq0$）
    - 解法：1. 直接开平方法 2.公式法：$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (b^2-4ac\geqslant0)$ 3. 配方法 4. 因式分解法
    - 根与系数的关系：1.如果x_1，x_2是一元二次方程$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$的两个根，那么$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$；2. 以x_1,x_2为根的一元二次方程（二次项系数为1）是$x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$
    - 根的判别式：$\Delta=b^2-4ac$；$\Delta>0$ 方程有两个不等实根；$\Delta=0$ 方程有两个相等实根；$\Delta<0$ 方程无实根
  - 分式方程：去分母法；换元法
  - 无理方程：换元法；方程两边平方法
  - 分式方程与无理方程注意验根（舍去增根）
- 方程组
  - 一次方程组
    - 二元一次方程组：1.代入消元法（消元）2.加减消元法
    - 三元一次方程组：1.代入消元法（消元）2.加减消元法
  - 二次方程组
    - 二元二次方程组：先用代入法、因式分解法消元降次，再求解
- 解方程（组）的基本思想：多元方程要“消元”，次数高的方程要“降次”，分式方程要去“分母”，化为整式方程，最后转化为解一元一次方程或一元二次方程
- 列方程（组）解应用题
  - 步骤：设→列→解→验→答（共五步）
  - 审题时要注意题目中所隐含的条件

一元一次不等式（组）

- 基本性质
  1. 不等式两边都加上（或减去）同一个数或同一个整式，不等号的方向不变
  2. 不等式两边都乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变
  3. 不等式两边都乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变

不等式	$a>0$	$a<0$	$a=0$
$ax>b$	$x>\frac{b}{a}$	$x<\frac{b}{a}$	$b<0$时全体实数 $b\geqslant0$时无解
$ax<b$	$x<\frac{b}{a}$	$x>\frac{b}{a}$	$b\leqslant0$时无解 $b>0$时全体实数

- 一元一次不等式
  - 解法：与一元一次方程解法类似
  - 注意：不等号的方向
- 一元一次不等式组
  - 解题步骤：1.先分别求出不等式组中每个不等式的解集 2.再利用数轴确定不等式组的解集
  - 解集

不等式组($a>b$)	不等式组的解集	数轴表示
$\begin{cases}x>a\\x>b\end{cases}$	$x>a$	b a x
$\begin{cases}x<a\\x<b\end{cases}$	$x<b$	b a x
$\begin{cases}x<a\\x>b\end{cases}$	$b<x<a$	b a x
$\begin{cases}x>a\\x<b\end{cases}$	无解	b a x

函数及其图象

平面直角坐标系

- 点的坐标
  - 各象限内、坐标轴上的点的坐标符号
  - 关于坐标轴、原点对称的两个点的坐标：P点与P′点关于x轴对称；P点与P′点关于y轴对称；P点与P′关于原点对称

函数的表示方法

解析法；列表法；图象法

函数图象及性质

函数	函数的定义	函数的图象	函数图象的性质
正比例函数	$y=kx$（k为常数，且$k\neq0$）的图象是过$(0,0)$点和$(1,k)$点的一条直线	$y=kx(k>0)$；$y=kx(k<0)$	1. 当$k>0$时，直线过一、三象限y随x的增大而增大 2. 当$k<0$时，直线过二、四象限y随x的增大而减小
一次函数	$y=kx+b$（k,b为常数，且$k\neq0$）的图象是过点$(0,b)$且平行于直线$y=kx$的一条直线，b叫做直线在y轴上的截距	$y=kx+b(k>0)$；$y=kx+b(k<0)$	当$k>0$时，y随x的增大而增大；当$k<0$时，y随x的增大而减小；当$b=0$时，即为正比例函数
二次函数	$y=ax^2+bx+c$（a,b,c为常数，且$a\neq0$）的图象是一条抛物线 顶点$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ 对称轴为直线$x=-\frac{b}{2a}$	$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$；$x=-\frac{b}{2a}$	1. 当$a>0$时，抛物线开口向上，当$x=-\frac{b}{2a}$时，函数有最小值$\frac{4ac-b^2}{4a}$；当$a<0$时，抛物线开口向下，当$x=-\frac{b}{2a}$时，函数有最大值$\frac{4ac-b^2}{4a}$ 2.当$\Delta=b^2-4ac>0$时，与x轴有两个交点；当$\Delta=0$时，与x轴只有一个公共点（顶点）；当$\Delta<0$时，抛物线与x轴没有公共点 3. $a>0$，$x>-\frac{b}{2a}$ y随x的增大而增大；$x<-\frac{b}{2a}$ y随x的增大而减小
反比例函数	$y=\frac{k}{x}$（k为常数，且$k\neq0$）的图象是双曲线	$k>0$；$k<0$	1. 当$k>0$时，图象的两个分支分别在第一、三象限内，在每个象限内，y随x的增大而减小 2. 当$k<0$时，图象的两个分支分别在第二、四象限内，在每个象限内，y随x的增大而增大

应用

1. 求函数自变量的取值范围
2. 判断某已知点是否在图象上；两个函数图象是否相交（有公共点）
3. 求已知函数与坐标轴的交点；求二次函数的顶点、对称轴；判断其图象是否与x轴相交
4. 用待定系数法求函数解析式
5. 与其他知识相联系的综合计算

锐角三角函数

锐角三角函数

$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$

$\angle A$的三角函数：正弦：$\sin A=\frac{a}{c}$ 正切：$\tan A=\frac{a}{b}$ 余弦：$\cos A=\frac{b}{c}$ 余切：$\cot A=\frac{b}{a}$

性质

锐角三角函数值都是正数

函数值变化 / 函数名	$0°\to90°$
$\sin\alpha$	$0\nearrow1$
$\cos\alpha$	$1\searrow0$
$\tan\alpha$	$0\nearrow+\infty$
$\cot\alpha$	$+\infty\searrow0$

特殊角的三角函数值

三角函数	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt3}{3}$	1	$\sqrt3$	不存在
$\cot\alpha$	不存在	$\sqrt3$	1	$\frac{\sqrt3}{3}$	0

互余两角的三角函数：$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$；$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$；$\tan(90°-\alpha)=\cot\alpha$；$\cot(90°-\alpha)=\tan\alpha$

解直角三角形 四种基本类型

已知条件		解法
两条边	两条直角边a和b	$c=\sqrt{a^2+b^2}$ $\tan A=\frac{a}{b}$，可求$\angle A$ $\angle B=90°-\angle A$
两条边	一条直角边a和斜边c	$b=\sqrt{c^2-a^2}$ $\sin A=\frac{a}{c}$，可求$\angle A$ $\angle B=90°-\angle A$
一条边和一个锐角	一条直角边a和锐角A	$\angle B=90°-\angle A$ $c=\frac{a}{\sin A}$ $b=a\cdot\cot A$
一条边和一个锐角	斜边c和锐角A	$\angle B=90°-\angle A$ $a=c\cdot\sin A$ $b=c\cdot\cos A$

相似与投影

比例线段

- 比例的性质
  - 比例的基本性质：$a:b=c:d$，$ad=bc$；$a:b=b:c$，$b^2=ac$（b叫做a,c的比例中项）
  - 合比性质：如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$
  - 等比性质：如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{m}{n}\ (b+d+\cdots+n\neq0)$，那么$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{a}{b}$
- 相关定理
  - 平行线分线段成比例定理：三条平行线截两条直线所得对应线段成比例
  - 推论：平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得对应线段成比例
  - 一条直线截三角形的两边（或两边的延长线），如果所截得的对应线段成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边
  - 平行于三角形的一边，并且和其他两边相交的直线，所截得的三角形的三边与原三角形三边对应成比例

相似三角形

- 性质
  1. 对应角相等
  2. 对应边成比例
  3. 对应高的比、对应中线的比和对应角平分线的比都等于相似比
  4. 周长的比等于相似比
  5. 面积的比等于相似比的平方
- 判定
  - 一般三角形相似的判定
    - 预备定理：平行于三角形一边的直线和其他两边（或两边的延长线）相交所构成的三角形，与原三角形相似
    - 判定定理1：两角对应相等，两三角形相似
    - 判定定理2：两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似
    - 判定定理3：三边对应成比例，两三角形相似
  - 直角三角形相似的判定
    - 直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形与原三角形相似
    - 如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例，那么，这两个直角三角形相似

相似多边形的性质

1. 对应角相等
2. 对应边成比例
3. 周长的比等于相似比
4. 对应对角线的比等于相似比
5. 对应三角形相似，它们的相似比等于相似多边形的相似比
6. 面积的比等于相似比的平方

圆

圆的概念和性质

- 圆的定义：圆是平面内到定点的距离等于定长的点的集合。不在同一直线上的三点确定一个圆（三角形的外接圆，三角形的外心，圆的内接三角形）
- 点的轨迹：图形是由符合条件的那些点组成的；图形包含了符合条件的所有的点
- 反证法步骤
  1. 假设命题的结论不成立
  2. 从这个假设出发，经过推理论证，得出矛盾
  3. 由矛盾判定假设不正确，从而肯定命题的结论正确
- 圆的对称性
  - 圆是轴对称图形：对称轴为经过圆心的每一条直线
    - 垂径定理：垂直于弦的直径平分弦并且平分这条弦所对的两条弧
  - 圆是中心对称图形，对称中心为圆心
    - 圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系定理：在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦的弦心距相等
    - 推论：在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦或两条弦的弦心距中有一组量相等，那么，它们所对应的其余各组量分别相等
- 圆周角定理：一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半 $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$
  - 推论：1.同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等；相等的圆周角所对的弧也相等；2.半圆（或直径）所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径；3.如果三角形一边上的中线等于这条边的一半，那么这个三角形是直角三角形
- 圆内接四边形：圆内接四边形对角互补，并且任何一个外角都等于它的内对角
- 圆的计算
  - 长度：圆周长 $C=2\pi R$，弧长$l=\frac{n\pi R}{180}$
  - 面积：圆面积 $S=\pi R^2$ 扇形面积 $S_{扇形}=\frac{n\pi R^2}{360}=\frac{1}{2}lR$，弓形面积 $S_{弓}=S_{扇}\pm S_{等腰三角形}$
  - 圆柱、圆锥的侧面展开图（分别是矩形与扇形）

圆和直线

- 相交 $d<R$
- 相离 $d>R$
- 相切 $d=R$
  - 三角形的内切圆，三角形的内心，圆的外切三角形，圆的外切多边形；圆的外切四边形，两组对边的和相等
  - 性质定理：圆的切线垂直于经过切点的半径
    - 推论1：经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点
    - 推论2：经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心
  - 判定定理：经过半径的外端点并且垂直于这条半径的直线是圆的切线
  - 切线长定理：从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等，圆心和这一点的连线平分两条切线的夹角 $PA=PB$ $\angle APO=\angle BPO$

圆和圆

- 外离 $O_1O_2>R+r$
- 相交 $R-r<O_1O_2<R+r$
- 外切 $O_1O_2=R+r$
- 内切 $O_1O_2=R-r$
- 内含 $O_1O_2<R-r$
- 同心圆
- 圆环面积公式：$S=\pi(R^2-r^2)$

圆和正多边形

- 性质
  - 把圆分成n（$n\geqslant3$）等份：1.依次连结各分点所得的多边形是这个圆的内接正n边形 2.经过各分点作圆的切线，以相邻切线的交点为顶点的多边形是这个圆的外切正n边形
  - 任何正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，这两个圆是同心圆
- 计算
  - 定理：正n边形的半径和边心距把正n边形分成$2n$个全等的直角三角形
  - 常用公式：(1)中心角α：$\alpha=\frac{360°}{n}$，$\frac{\alpha}{2}=\frac{180°}{n}$ (2)边长a_n：$a_n=2R\sin\frac{180°}{n}$ (3)边心距r_n：$r_n=R\cos\frac{180°}{n}$ (4)半径R：$R^2=r_n^2+\frac{1}{4}a_n^2$ (5)周长P_n：$P_n=na_n$ (6)面积S_n：$S_n=\frac{1}{2}n\cdot r_n\cdot a_n=\frac{1}{2}r_n\cdot P_n$

直线形

线段、角

- 直线、射线和线段
  - 公理：1.过两点有且只有一条直线 2.在连结两点的所有线中，线段最短
  - 线段的垂直平分线 性质：线段的垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等；到一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上
- 角
  - 定义：有公共端点的两条射线组成的图形
  - 分类：锐角、直角、钝角、平角、周角
  - 对顶角：对顶角相等 $\angle\alpha=\angle\beta$
  - 余角、补角、邻补角：同角或等角的余角相等；同角或等角的补角相等

相交线、平行线

- 垂线
  - 定义：当两条直线相交所成的四个角中，若有一个角是直角，那么这两条直线互相垂直，其中的一条叫做另一条的垂线
  - 性质：1.经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线 2.直线外一点与直线上各点连结的所有线段中，垂线段最短
- 平行线
  - 定义：在同一平面内不相交的两条直线
  - 性质：1.两直线平行，同位角相等 2.两直线平行，内错角相等 3.两直线平行，同旁内角互补
  - 判定：1.同位角相等，两直线平行 2.内错角相等，两直线平行 3.同旁内角互补，两直线平行
  - 平行公理：经过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行
  - 推论：如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行
- 距离：点到点的距离；点到直线的距离；平行线间的距离
- 空间直线、平面的位置关系：直线与直线的平行、相交、异面的关系；直线与平面的平行、垂直关系；平面与平面的平行、垂直关系（以长方体的棱、对角线和各面之间的位置关系为例）
- 命题、定理、证明
  - 真命题与假命题
  - 逆命题、逆定理：交换一个命题的题设和结论，所得到的命题与原命题是互逆命题；原命题是真命题，它的逆命题不一定也是真命题，如果原命题经过证明是真命题，逆命题也是真命题，那么它们组成一对互逆定理
  - 证明几何命题的一般步骤：1.根据题意，画出图形 2.根据题设、结论，结合图形，写出已知、求证 3.经过分析，找出由已知推出求证的途径，写出证明过程

三角形

- 分类
  - 按边分
    - 不等边三角形
    - 等腰三角形
      - 底边和腰不等的等腰三角形
        - 性质：1.两个底角相等，两腰相等；2.顶角平分线是底边上的高，也是底边上的中线，“三线合一” 3.是轴对称图形，底边的垂直平分线为对称轴
        - 判定：1. 根据定义（证两边相等） 2. 一个三角形中，等角对等边
      - 等边三角形
        - 性质：1. 等腰三角形的所有性质 2. 各角都等于60°，各边相等
        - 判定：1. 根据定义（证三边相等） 2. 三个角都相等的三角形 3. 有一个角等于60°的等腰三角形
  - 按角分
    - 锐角三角形
    - 直角三角形
      - 性质：1.两个锐角互余 2.斜边上的中线等于斜边一半 3.勾股定理：直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方 4.在直角三角形中，30°的锐角所对的直角边等于斜边的一半
      - 判定：1. 两角和为90°的三角形必为直角三角形 2. 如果三角形的三边长a,b,c满足$a^2+b^2=c^2$，则此三角形是直角三角形（勾股定理的逆定理）
    - 钝角三角形
- 主要线段：三角形的角平分线、中线、高线、中位线
  - 三角形中位线定理：三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半
- 边、角关系
  - 边边关系：两边之和大于第三边，两边之差小于第三边
  - 角与角的关系：三内角和等于180°；一个外角等于和它不相邻的两个内角的和；一个外角大于任何一个和它不相邻的内角
  - 边角关系：等边对等角，等角对等边，大角对大边
- 全等三角形
  - 性质：对应边相等，对应角相等
  - 判定：一般三角形 边角边定理(SAS)；角边角定理(ASA)；角角边定理(AAS)；边边边定理(SSS)；直角三角形 斜边、直角边定理(HL)
- 尺规作图：利用基本作图作三角形

四边形

- 平行四边形
  - 定义：两组对边分别平行的四边形
  - 性质：1.对边平行且相等 2.对角相等，邻角互补 3.对角线互相平分
  - 面积：面积等于一边与这边上的高的积
  - 判定：1.根据定义 2.两组对边分别相等的四边形 3.一组对边平行且相等的四边形 4.两组对角分别相等的四边形 5.对角线互相平分的四边形
  - 特殊平行四边形
    - 矩形
      - 定义：有一个角是直角的平行四边形
      - 性质：1.平行四边形的所有性质 2.四个角都是直角 3.两条对角线相等
      - 判定：1.根据定义判定 2.有三个角是直角的四边形 3.对角线相等的平行四边形
    - 菱形
      - 定义：有一组邻边相等的平行四边形
      - 性质：1.平行四边形的所有性质 2.四条边都相等 3.两条对角线互相垂直且平分每组对角
      - 面积：等于两条对角线乘积的一半
      - 判定：1.根据定义判定 2.四条边都相等的四边形 3.对角线互相垂直平分的平行四边形
    - 正方形
      - 定义：有一个角是直角，并且有一组邻边相等的平行四边形
      - 性质：具有平行四边形、矩形、菱形的所有性质
      - 判定：1.有一组邻边相等的矩形 2.有一个角是直角的菱形
- 梯形
  - 等腰梯形
    - 性质：1.同一底上的两个角相等 2.两条对角线相等
    - 判定：1. 根据定义 2. 同一底上的两个角相等的梯形
  - 一般梯形（含直角梯形）
  - 梯形中位线定理：梯形中位线平行于上、下底边，并且等于两底和的一半
- 其他性质
  1. 多边形内角和等于$(n-2)\cdot180°$（其中$n>2$，n为整数），外角和等于360°
  2. 平行线等分线段定理及推论
  3. 中心对称和中心对称图形的性质
  4. 三角形面积公式及推论：等（同）底等（同）高的三角形等积

目　录

1. 第一章　数与式　第一节　实数及其运算
2. 第一章　数与式　第二节　整式
3. 第一章　数与式　第三节　分式
4. 第一章　数与式　第四节　二次根式
5. 第二章　方程与不等式　第一节　方程的基础知识
6. 第二章　方程与不等式　第二节　一元一次方程
7. 第二章　方程与不等式　第三节　二元一次方程与方程组
8. 第二章　方程与不等式　第四节　一元二次方程及其解法
9. 第二章　方程与不等式　第五节　一元二次方程根的判别式及根与系数的关系
10. 第二章　方程与不等式　第六节　列方程解应用题
11. 第二章　方程与不等式　第七节　分式方程
12. 第二章　方程与不等式　第八节　一元一次不等式和不等式组
13. 第三章　函数及其图像　第一节　平面坐标系与函数
14. 第三章　函数及其图像　第二节　一次函数　第三节　反比例函数
15. 第三章　函数及其图像　第四节　二次函数
16. 第四章　图形的初步知识
17. 第五章　三角形　第一节　三角形及全等三角形
18. 第五章　三角形　第二节　特殊三角形与勾股定理
19. 第六章　四边形　第一节　多边形的概念及性质
20. 第六章　四边形　第二节　平行四边形
21. 第六章　四边形　第三节　特殊的平行四边形
22. 第六章　四边形　第四节　梯形
23. 第七章　圆　第一节　圆的概念与性质
24. 第七章　圆　第二节　与圆有关的位置关系
25. 第七章　圆　第三节　与圆有关的计算　第四节　正多边形
26. 第八章　相似与投影　第一节　相似三角形
27. 第八章　相似与投影　第二节　投影与视图
28. 第九章　图形与变换　第一节　图形的对称
29. 第九章　图形与变换　第二节　图形的平移与旋转
30. 第九章　图形与变换　第三节　图形的变换与坐标
31. 第十章　锐角三角函数　第一节　锐角三角函数
32. 第十章　锐角三角函数　第二节　解直角三角形
33. 第十一章　统计与概率　第一节　统计
34. 第十一章　统计与概率　第二节　概率

初中数学　第一章　数与式　第一节　实数及其运算

总结升华

学习误区

- ①化简绝对值时，没有判断绝对值符号中各个数或式子的正负.
- ②实数的混合计算“两变”出现错误.
- ③用科学记数法表示数时，容易把n的值算错.

知能提升

- ①关于绝对值的化简与计算问题，关键是要先判断绝对值符号中各个数或式子的正负.再根据绝对值的意义去掉绝对值符号.
- ②实数的混合计算注意两变：一是把运算符号“–”变成“+”，减数变成它的相反数；二是把运算符号“÷”变成“×”，除数变为它的倒数，除数不能为0.
- ③用科学记数法表示一个绝对值大于10的数时，等号右边数的形式为$a\times10^n$，a是一个只有一位整数的数，n比等号左边的整数位数小1.

学法指导

学习方法

数形结合，实数与数轴上的点一一对应，我们可以将数与形结合起来解决问题，起到化难为易的效果.

把握难点概念特征

- 相反数的几何意义：在数轴上位于原点的两侧，且与原点距离相等的两个点.
- 去绝对值，看符号：$|a|=\begin{cases}a\ (a>0)\\0\ (a=0)\\-a\ (a<0)\end{cases}$
- 无理数的常见类型
  - 开方开不尽的数：如$\sqrt{2},3\sqrt{3}$等
  - 化简后含π的数：如$\frac{\pi}{2}$，$\pi+3$等
  - 无限不循环小数：如0.010 010 00…等
  - 部分三角函数：如$\sin60^\circ,\tan30^\circ,\cos45^\circ$等
- 关于零要牢记
  - 零既不是正数，也不是负数.
  - 零的相反数为零，绝对值也为零.
  - 零没有倒数.
- 非负数要关注：$|a|\geqslant0,a^2\geqslant0$，$\sqrt{a}\geqslant0(a\geqslant0),\sqrt{a^2}=|a|$

实数大小的比较

- 利用数轴：右边的点表示的数总比左边的点所表示的数大.
- 利用绝对值：比大小，两个负数相比较，绝对值大的反而小
- 平方法：若$a>0,b>0$，则$a^2>b^2>0\Leftrightarrow a>b$
- 作差法：$a-b>0\Leftrightarrow a>b$；$a-b=0\Leftrightarrow a=b$；$a-b<0\Leftrightarrow a<b$
- 作商法：$\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$；$\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$（$a>0,b>0$）；$\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$

知识梳理

实数中的概念

- 正数：像5，1.5等大于0的数叫做正数.
- 负数：像–5，–1.5等在正数前面加上“–”号的数叫做负数.
- 数轴：规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴.
- 相反数：只有符号不同的两个数，叫做互为相反数.
- 绝对值：数轴上点a与原点的距离叫做a的绝对值，记作$|a|$.
- 无理数：无限不循环的小数叫做无理数.
- 倒数：乘积为1的两个实数互为倒数.
- 近似数：与实际数比较接近的数，称为近似数.
- 有效数字：对于一个近似数，从左边第一个不是零的数字，到最末一位数字为止，都是这个近似数的有效数字.
- 科学记数法：把一个数记作$a\times10^n$的形式（其中$1\leqslant|a|<10$，n为整数）.
- 平方根：如果$x^2=a(a\geqslant0)$，那么x叫做a的平方根，记作$x=\pm\sqrt{a}$；正数a的正的平方根叫做a的算术平方根，记作$\sqrt{a}$.
- 立方根：如果$x^3=a$，那么x叫做a的立方根，记做$\sqrt[3]{a}$.

实数的分类

- 按定义
  - 有理数
    - 整数：正整数、零、负整数
    - 分数：正分数、负分数
    - （有限小数或无限循环小数）
  - 无理数
    - 正无理数
    - 负无理数
    - （无限不循环小数）
- 按正负
  - 正实数
    - 正有理数：正整数、正分数
    - 正无理数
  - 零
  - 负实数
    - 负有理数：负整数、负分数
    - 负无理数

实数的运算

- 加　法：同号两数相加，取原来的符号，并把它们的绝对值相加.
  异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大数的绝对值减去较小数 的绝对值.
- 减　法：减去一个数等于加上这个数的相反数.
- 乘　法：两数相乘，同号得正，异号得负，并把它们的绝对值相乘.
  几个非零实数相乘，积的符号由负因数的个数决定，当负因数有偶数个时，积为正；当负因数有奇数个时，积为负.
  n个数相乘，有一个因数为0，积为0.
- 除　法：两数相除，同号得正，异号得负，并把它们的绝对值相除.
  0除以任何一个不等于0的数都得0.
- 乘　方：几个相同因数的积的运算，叫做乘方，记作$a^n(a\neq0$，n为正整数).开方与乘方互为逆运算.
- 运算律：（1）$a+b=b+a$；（2）$a+(b+c)=(a+b)+c$；（3）$ab=ba$；（4）$(ab)c=a(bc)$；（5）$a(b+c)=ab+ac$.
- 运算顺序：分级：加减是一级运算，乘除是二级运算，乘方和开方是三级运算.三级运算的顺序是三、二、一.（如果有括号，先算括号内的；如果没有括号，在同一级运算中，要从左至右进行运算，无论何种运算，都要注意先定符号后运算.）

初中数学　第一章　数与式　第二节　整式

总结升华

学习误区

1、代数式的恒等变形不恒等.

2、因式分解不彻底.　（1）忽略符号；（2）漏项；（3）结果不是最简形式.

3、运用幂的运算法则不注意同底数出错误.

4、列代数式时，对一些语句理解不透容易出错，如 a、b 两数的平方和与 a、b 两数和的平方混淆.

5、合并同类项时把系数和次数均相加导致错误.

6、去括号添括号时，特别是括号前是“–”的情况，容易把某一项或某几项忘记变号而出错.

知能提升

1、对于幂的运算性质和乘法公式，不仅要掌握它们的结构特征，而且要理解每一公式中字母的内涵，进而灵活、恰当地应用.

2、因式分解必须在指定的数的范围内进行，且必须分解到每个多项式都不能再分解为止.

3、列代数式时，读题不能只看局部不看整体.

4、牢记合并同类项的法则，字母与字母的指数不变来进行.

5、去括号的几种特殊方法

(1)先整体合并，再去括号.在整式的加减运算中，如果有几部分都含有多项式 A，那么把 A 看成一个整体，使这几部分合并成一项，再去掉 A 的括号.

(2)从外到里去括号，减少变号次数.只含有小括号和中括号，那么把小括号内的各项视为一个整体，先去中括号，再去小括号.

(3)一次去掉多重括号，在含有多重括号的式子中，去括号时，括号里的项是否变号，只与该项以及该项所在各层括号前的“–”号相关.当某项受奇数个“–”号影响时该项变号；受偶数个“–”号影响时不变号.

知识梳理

整式有关概念

代数式：用运算符号（加、减、乘、除、乘方、开方等）把数与字母连接而成的式子.

单项式：数与字母的积所表示的代数式.单独一个数或一个字母也是单项式.

多项式：在多项式中，每个单项式叫做多项式的项，其中不含字母的项叫做常数项.

几个单项式的和叫做多项式

同类项：所含的字母相同，并且相同字母的指数也分别相同的单项式叫做同类项.

合并同类项：系数相加，所得的结果作为合并后的系数，字母和字母的指数不变叫做合并同类项.

整式的运算

整式的加减：就是合并同类项，遇到括号，一般先去掉括号，去括号的方法是：$+(a+b-c)=a+b-c$；$-(a+b-c)=-a-b+c$.

幂的运算法则：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；$a^m\div a^n=a^{m-n}$；$(ab)^n=a^nb^n$（m，n 都为整数，$a\neq0$，$b\neq0$）

整式的乘法：$m(a+b+c)=ma+mb+mc$；$(m+n)(a+b)=ma+mb+na+nb$

整式的除法：单项式除以单项式，分别把系数、同底数幂相除，作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式.

多项式除以单项式，把这个多项式的每一项除以这个单项式，然后把所得的商相加.

零指数和负整数指数：$a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$，$a^0=1$（$a\neq0$，p 为整数）.

乘法公式：平方差公式　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；完全平方公式　$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$

因式分解

定义：把一个多项式化为几个整式的积的恒等变形

方法：

- 提取公因式法　$ma+mb+mc=m(a+b+c)$
- 公式法
  - (1)平方差公式：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
  - (2)完全平方公式：$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$
- 分组分解法　$ma+mb+na+nb=m(a+b)+n(a+b)=(a+b)(m+n)$
- 十字相乘法　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

学法指导

整式运算

列代数式：加减运算的核心是去括号与合并同类项，乘除运算的核心是幂的运算.在运算时要把握运算法则和运算顺序.

1. 认真读题，正确理解题中的数量关系，抓住题中的和、差、积、商、乘方、开方、大、小、多、少、倍、分、倒数等关键词语，理解量与量之间的关系，直接列代数式.

去括号

2. 弄清运算顺序，正确使用括号.

3. 在同一问题中不同的对象或不同的数量要用不同的字母表示.

4. 在列代数式时，要注意代数式的格式和单位的书写.

1. 注意括号前是“–”时，括号里各项要改变符号.

2. 括号前的系数要和括号里的每一项系数相乘，防止漏乘现象.

因式分解

十字相乘法

x　a　左竖乘：$x\times x=x^2$

x　b　右竖乘：$a\times b=ab$

交叉相乘：$ax+bx=(a+b)x$

步骤

1.若多项式的各项有公因式，则先提取公因式；

2.若无公因式，可尝试用公式分解；

3.上述方法不能分解，可试用分组或十字相乘法；

4.反复尝试 分解到不能再分解为止.

注意事项

多项式 $\xrightarrow[\text{整式乘法}]{\text{因式分解}}$ 整式乘积

1. 因式分解的实质是一种恒等变形，是一种化和差为积的变形，多项式 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 几个整式的积.

2. 因式分解与整式乘法是互逆的.

3. 在因式分解的结果中，每个因式都必须是整式，如 $x+1=x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ 这种变形就不是因式分解.

4. 因式分解要分解到不能再分解为止.

初中数学　第一章　数与式　第三节　分式

学习误区

1、不能正确理解并掌握分式的基本性质.

2、约分时，分子与分母不是乘积形式也进行了约分,如 $\frac{x+y}{x}\neq\frac{1+y}{1}$

3、约分约去的不是分子、分母的公因式；通分时分子与分母同时乘的不是最小公倍数.

4、不能区分分式何时有意义，何时无意义.

5、解分式方程时忘记验根，去分母时漏乘整式项.

知能提升

1、分式的基本性质用式子表示是：$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M},\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$，式子中$A$，$B$，$M$都是整式，特别要注意整式$M$的值不等于零.

2、分式的分子、分母与分式本身的符号，改变其中的任何两个，分式的值不变.如$-\frac{-a}{-b}=-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$,再如$\frac{1}{a-b}=-\frac{1}{b-a}$

3、分式有意义的条件是分母不为0；分式无意义的条件是分母为0；分式值为0的条件是分子等于0，但分母不等于0.

4、参数法：当已经条件形如$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$，所要求值的代数式是一个含$x$，$y$，$z$，$a$，$b$，$c$，而又不易化简的分式时，通常设$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$（$k$就是我们所说的参数），然后将其变形为$x=ka,y=kb,z=kc$，代入所求代数式.

总结升华

知识梳理

分式的概念

定　义：形如$\frac{A}{B}$的式子（A，B均为整式，B中含有字母，且$B\neq0$）.

最简分式：分子和分母没有公因式的分式.

基本性质

文字表述：分式的分子和分母都乘（或除以）同一个不等于零的整式，分式的值不变.

式子表述：$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{A\times M},\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{A\div M}$（$M\neq0$，$M$为整式）

分式的运算

分式的加减法

同分母的分式相加减，分母不变，把分子相加减，即$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$.

异分母的分式相加减，先通分，变成同分母的分式，然后相加减，即$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}$.

分式的乘除法

分式乘分式，用分子的积作积的分子，分母的积作积的分母，即$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置，与被除式相乘，即$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}(c\neq0)$

分式的乘方

分式的乘方：分式的乘方是把分子、分母各自乘方，即：$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$（$n$为整数）.

分式的混合运算

先算乘方，再将除法化为乘法，进行约分化简，最后进行加减运算，遇有括号，先算括号里面的.

学法指导

常用技巧

符号

改变分子或分母的符号是指改变整个分子或分母的符号，而不是第一项或某一项的符号，如$-\frac{-a}{-b}=-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$.

运算

除法与乘法是同级运算，除法可以转化为乘法，它们的混合运算不满足结合律，要按从左到右的顺序进行，或先把除法转化为乘法后再结合，如$a+\frac{1}{b}\times b=a+\left(\frac{1}{b}\times b\right)=a$.这样算是错误的，应为$a\div\frac{1}{b}\times b=a\times b\times b=ab^2$.

裂项

裂项是把一项化为两项，使计算得以顺利进行，常用的裂项有：$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$.

代换

整体代换,利用公式变形.

如，已知$x+\frac{1}{x}=2$，求$x^2+\frac{1}{x^2}$.可变形为

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=2^2-2=2$

分式的通分和约分

通　分

1. 当几个分式的分母是单项式时，各分式的最简公分母是系数的最小公倍数，相同字母的最高次幂的所有不同字母的积.

2. 如果各分母是多项式，应先把各个分母按某一字母降幂或升幂排列，再分解因式，找出最简公分母.

3. 通分后的各分式的分母相同，通分后的各分式分别与原来的分式相等.

约　分

1. 当分子、分母是单项式时，公因式是相同因式的最低次幂与系数的最大公约数的积.

2. 当分子、分母是多项式时，应先将多项式分解因式，约去公因式.

解分式方程

步骤：①去分母化为整式方程；②解整式方程；③检验.

初中数学　第一章　数与式　第四节　二次根式

学习误区

1. 二次根式有意义的条件：不能只局限于二次根式有意义，还要同时考虑其他有意义（如分母不能为0），考查问题要全面.

2. 不能正确理解 $\sqrt{a^2}$ 的非负性，例，当 $a=5$ 时，求 $a+\sqrt{1-2a+a^2}$ 的值，错误解法：原式 $=a+|1-a|=a+1-a=1$.

3. 在二次根式化简中，错用分配律，例，$\sqrt{6}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{6}+\frac{1}{\sqrt{3}}+6+\frac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$.

   忽视隐含条件，例，$a+b=-8, ab=8$，即：$a<0, b<0$，这个条件.化简 $a\sqrt{\frac{a}{b}}+b\sqrt{\frac{b}{a}}$，导致化简出错.

知能提升

在化简二次根式时，若被开方数是带分数，首先要转化成假分数，再化简.

在二次根式化简时要运用转化与化归的思想，可化难为易，迅速得到答案.

在分解因式时，由 $(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$，得 $a=(\sqrt{a})^2$，可把一个非负数转化成一个数的平方形式，再分解.

根式 $\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant 0,\ b>0)$ 的化简方法

把 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 化成 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$，然后分母有理化.

把 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 化成 $\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$.

分母有理化的方法与技巧

1. 由 $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$，可知 $\sqrt{a}$ 的有理化因式是 $\pm\sqrt{a}$.

2. 由平方差公式，可知 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ 有理化因式是 $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$.

分母有理化关键是确定有理化因式

总结升华

二次根式的概念

定　义　形如 $\sqrt{a}(a\geqslant 0)$ 的式子叫做二次根式.

最简二次根式　满足下列两个条件
- 被开方数不含分母；
- 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

同类二次根式　化成最简二次根式后，被开方数相同的二次根式.

知识梳理

二次根式的性质

- $\pm\sqrt{a}(a\geqslant 0)$ 叫做 a 的平方根.
- $\sqrt{a}(a\geqslant 0)$ 叫做 a 的算术平方根.
- $\sqrt{a}(a\geqslant 0)$ 是非负数，即 $\sqrt{a}\geqslant 0$.
- $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$.
- $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0)\\-a(a<0)\end{cases}$.
- $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0, b\geqslant 0)$.
- $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0, b>0)$.

二次根式的运算

加　减　先将各二次根式化成最简二次根式，然后再合并同类二次根式.

乘　除
- $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}(a\geqslant 0, b\geqslant 0)$.
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geqslant 0, b>0)$.

混合运算　与实数的运算顺序相同.

学法指导

二次根式的定义

形如 $\sqrt{a}\ (a\geqslant 0)$ 的式子叫做二次根式，理解定义的关键是“被开方的数 a 是非负数”.

二次根式的性质

能判断二次根式是否是最简二次根式

会判断二个二次根式是否是同类根式

1. $\sqrt{a}$ 连同 a^2、$|a|$ 都是非负数.

2. $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$，$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0)\\-a(a<0)\end{cases}$，所以 $(\sqrt{a})^2$ 与 $\sqrt{a^2}$ 是不一样的，只有当 $a\geqslant 0$ 时，$(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}$.它们在二次根式的化简和运算中起决定性的作用.

3. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}(a\geqslant 0, b\geqslant 0)$ 和 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0, b>0)$ 一般用于二次根式的化简.

有理化因子

1. $\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{a}$.
2. $a+\sqrt{b}$ 与 $a-\sqrt{b}$.
3. $a+b\sqrt{c}$ 与 $a-b\sqrt{c}$.
4. $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ 与 $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$.

二次根式的运算

1. 它和整式的运算是相联的，特别是一些运算定律和乘法公式（完全平方公式，平方差公式）在二次根式的运算中都可以运用，起到简化运算的作用.

2. 二次根式的混合运算顺序是：先乘方，再乘除，后加减，有括号的先算括号内的（或先去掉括号）.

3. 掌握二次根式的加、减、乘、除的运算法则，掌握分母有理化，按照运算顺序进行化简与计算.

初中数学　第二章　方程与不等式　　第一节　方程的基础知识

学习误区

1、概念理解错误导致出错.

2、性质运用错误导致出错.

知能提升

代数式、等式与方程的区别与联系

1.区别

（1）定义不同.

（2）代数式仅用运算符号连接，不含等号.

（3）方程是特殊的等式，但等式不一定是方程.

2.联系

（1）等式和方程的左、右两边都由代数式构成.

（2）方程是含有未知数的等式.

总结升华

学法指导

概念问题

1、等式的概念

只要是用“=”连接的式子，而不管它是否成立.

2、方程的概念

两个条件，缺一不可

是等式

含有未知数.

3、方程的解

它（或它们）是方程中未知数的值.

将它（们）分别代入方程的左边和右边，左边等于右边.

性质

基本性质1

若 $a=b$，则 $a\pm c=b\pm c$.

基本性质2

若 $a=b$，则 $a\cdot c=b\cdot c$，$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}(c\neq 0)$.

基本性质3

若 $a=b$，则 $b=a$；若 $a=b,b=c$ 则 $a=c$.

知识梳理

等式

定义：用等号“=”来表示相等关系的式子，叫做等式.

性质

（1）等式的两边都加上（或减去）同一个数或同一个整式，所得结果仍是等式.

$a=b \Leftrightarrow a\pm c=b\pm c$

（2）等式两边都乘（或除以）同一个不为0的数，所得结果仍是等式.

$a=b,c\neq 0 \Leftrightarrow ac=bc,a\div c=b\div c$

方程

定义：含有未知数的等式叫做方程.

如，$x+3=5,x+y=1,x^2+2x-3=0,\cdots$

方程的解：使方程左右两边的值相等的未知数的值叫做方程的解，只有一个未知数的方程的解，也叫做方程的根.

解方程：求方程的解的过程叫做解方程.

同解方程式：若两个方程的解相同，则这两个方程叫做同解方程.

常见的几种方程

一元一次方程：形如 $ax+b=0(a\neq 0)$

二元一次方程组：形如 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$

一元二次方程：形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

分式方程：形如 $\frac{b}{x+a}+\frac{b}{x-a}=1$，即分母含有未知数的方程.

无理方程：形如 $\sqrt{x+a}+b=0$，即根号内含有未知数的方程.

初中数学　第二章　方程与不等式　第二节　一元一次方程

总结升华

学习误区

1、移项忘记变符号.
2、违反去括号法则.
3、去分母时，漏给不含分母的项乘公分母.
4、忽视分数线的“括号”作用.
5、忽视“0”的特性：任何数与0相乘都得0.
6、小数化为整数时，把小数以外的数也跟着扩大.
7、小数化为整数时，同一分数中的分子，分母扩大的倍数不同.

知能提升

用一元一次方程解决实际问题的基本思路

实际问题 —抽象→ 数学问题 —分析→ 已知量，未知量，等量关系
↕ 不合理 ↑ ↓ 列出
解释 ← 解的合理性 —验证→ 方程的解 —求出→ 方程

知识梳理

定义

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是1，系数不等于0的整式方程叫做一元一次方程，它的一般形式为 $ax+b=0$（a，b为常数，$a\neq0$）.

解方程步骤

1、去分母　方程两边同时乘各分母的最小公倍数.
2、去括号　先去小括号，再去中括号，最后去大括号.
3、移项　把含有未知数的项移到方程的左边，其他项移到方程的右边，移项要变号.
4、合并同类项　化为最简方程 $ax=b(a\neq0)$ 的形式.
5、系数化为1　$x=\frac{b}{a}$

列方程解应用题

1. 弄清题意和题目中的已知数、未知数，用字母表示题目中的一个未知数
2. 找出能够表示应用题中全部含义的一个相等关系.
3. 根据相等关系，列出方程.
4. 解方程，求出未知数的值.
5. 写出答案.

口　诀　已知未知要分离，方法就是两边移.
加减移项要变号，乘除移了要颠倒.

学法指导

解方程注意问题

去分母　若有分母先去掉，化为整式很重要；各项都乘公分母，分子项多加括号.
去括号　正括号来不变号，负括号来全变号；各项都要乘系数，系数分配要公道.
移项　未知在左常数右，移项切记要变号.
合并同类项　同类合并要谨慎，一边一项处理好.
系数化为一　系数乘倒整数除.

列方程应注意问题

找出已知与未知，相等关系列方程.
解出负数要斟酌，未知范围莫忽略.

应用类型

和差倍分问题、等积变形问题、数字问题、行程问题（相遇、追及、航行）、劳力调配问题、工程问题、储蓄问题、商品利润问题……

字母系数的一元一次方程

可化为$ax=b$的形式
(1)$a\neq0$, $x=\frac{b}{a}$.
(2)$a=0, b\neq0$, x无解.
(3)$a=0, b=0$, x为任意实数.

初中数学　第二章　方程与不等式　第三节　二元一次方程与方程组

知能提升

总结升华

列二元一次方程组解应用题常用策略

1、“直接”与“间接”转换
- 当直接的未知数不便求解时，转而设间接未知数求解.

2、“一元”与“多元”转换
- 当设一个未知数有困难时，可以考虑设多个未知数求解.

3、“部分”与“整体”转换
- 当整体设元有困难时，就考虑设其部分.

4、“一般”与“特殊”转换
- 当从一般情况入手困难时，就着眼于特殊情况.

5、“文字”与“图表”转换
- 有的题目，用文字语言表达不准确时，就可用表格或图形分析，这样既直观，又易理解题意.

学习误区

1、概念理解不清致错.

2、忽视移项变号.

3、运用代入法消错未知数.

4、利用加减消元法时漏乘出错.

5、解含字母系数的方程时，忽略了字母的取值范围.

学法指导

二元一次方程组的解

1. 二元一次方程组中各个方程的公共解.
2. 方程组的解同时使二元一次方程组中每一个方程的左右两边的值相等.
3. 一般情况下，二元一次方程组只有唯一的一组解.

二元一次方程组的一般解法

基本思想：消元

1、代入消元法
- 求关系式.
- 代入消元.
- 回代得解.

2、加减消元法
- 变换关系.
- 加减消元.
- 回代得解.

列一次方程组解决实际问题

1、弄清题意，设未知数.

2、找出表示实际问题全部含义的等量关系.

3、列出两个或两个以上的方程，组成方程组.

4、解这个方程组，求出未知数的值.

5、检验结果的正确性及合理性，并写出答案.

三元一次方程组

$\xrightarrow[化]{消元}$ 二元一次方程组 $\xrightarrow[化]{消元}$ 一元一次方程

知识梳理

二元一次方程定义

如果一个方程中含有两个未知数，并且未知数的最高次数是1的整式方程叫做二元一次方程.
一般形式：$ax+by+c=0(a\neq 0,\ b\neq 0)$.

二元一次方程组

- 定义：由两个二元一次方程组成的一组方程叫做二元一次方程组.
- 解：使两个方程左、右两边都相等的两个未知数的值叫做二元一次方程组的解.

二元一次方程的解法

代入消元法

1. 将其中一个方程变形，用含有一个未知数的代数式表示另一个未知数，例如：改写为 $y=ax+b$ 的形式.
2. 将 $y=ax+b$ 代入另一个方程消去y，得到一个关于x的一元一次方程.
3. 解这个一元一次方程，求出x的值.
4. 把求得的x的值代入 $y=ax+b$，求出y的值，从而得到方程组的解.

加减消元法

（1）用适当的数乘方程的两边，使同一个未知数的系数互为相反数或相等.

（2）把两个方程的两边分别相加或相减，消去一个未知数，得到一个一元一次方程.

（3）解这个一元一次方程.

（4）将求出的未知数的值代入原方程组中的任意一个方程，求出另一个未知数的值，从而得到方程组的解.

三元一次方程组

- 定义：由几个一次方程组成并含有三个未知数的方程组，叫做三元一次方程组.

一次方程组的应用

列方程组解应用题

初中数学　第二章　方程与不等式　第四节　一元二次方程及其解法

知识梳理

定义

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是2的整式方程叫做一元二次方程.

一般形式

一般形式：$ax^2+bx+c=0$（a，b，c是常数，$a\neq 0$）

ax^2叫二次项，a是二次项系数；bx叫一次项，b是一次项系数；c叫常数项.

解法

- **直接开平方法**：将方程化成 $x^2=a(a\geqslant 0)$ 的形式，两边同时开平方，得 $x=\pm\sqrt{a}$.
- **配方法**：将 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）化为 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，用直接开平方法求解.
- **公式法**：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$），当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
- **因式分解法**：将 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 化为$(x-m)(x-n)=0$的形式，此时 $x_1=m,x_2=n$是方程的解.

总结升华

知能提升

- **方程根的个数对方程类型的暗示**
  - 1. 只有一个实数根 $\xrightarrow{\text{暗示}}$ 方程是一元一次方程.
  - 2. 有两个实数根 $\xrightarrow{\text{暗示}}$ 方程是一元二次方程.
  - 3. 有实数根 $\xrightarrow{\text{暗示}}$ 两种可能.
- **运用公式法解方程应注意**
  - 1. 化为一般形式.
  - 2. 前提条件，$b^2-4ac\geqslant 0$.
- **灵活选用解方程的方法**
  - 首选直接平方法，其次考虑因式分解法，再次对任何方程都能用公式法，有特殊要求时用配方法.

学习误区

1、运用一元二次方程的定义解题时，应注意二次项系数不为0.

2、当题目未指明方程是何种类型时，应注意分类讨论.

学法指导

一元二次方程概念问题

1、一般地，任何一个关于x的一元二次方程经过整理，都可以化为$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的形式，其中$a\neq 0$是定义的一部分，不可漏掉.

2、判断方程是一元二次方程的步骤：①化简整理；②按照定义判断.

3、若所研究的问题明确指出方程是一元二次方程，则它隐含了 $a\neq 0$ 这个条件；若没有特别说明，方程不一定是一元二次方程，还有可能是一元一次方程.

一元二次方程一般形式问题

1、系数和项都包含它前面的符号.

2、任何一个一元二次方程都可以整理为一般形式.

3、一次项系数或常数项为0时，方程仍然是一元二次方程.

4、如果一般形式中的二次项系数为负数，最好将方程两边都乘以–1，使二次项系数变为正数.

一元二次方程的解法问题

- **1.直接开平方法**：①形式：$(ax+b)^2=c$. ②前提：$c\geqslant 0$.
- **2.配方法**：①化 → ②移 → ③配 → ④解
- **3.公式法**
  - 先化为一般形式，确定 a,b,c .
  - 使用公式的前提条件是 $b^2-4ac\geqslant 0$.
- **4.因式分解法的几个常用公式**
  - $am+an=a(m+n)$.
  - $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.
  - $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.
  - $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

初中数学　第二章　方程与不等式　第五节　一元二次方程根的判别式及根与系数的关系

知识梳理

根的判别式 $\triangle = b^2 - 4ac$

- $\triangle = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根.
- $\triangle = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根.
- $\triangle < 0 \Leftrightarrow$ 方程无实数根.

根与系数的关系

1. 如果一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根是 x_1, x_2，则 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$
2. 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根是 x_1, x_2，那么 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$

求作方程

两根为 x_1，x_2 的一元一次方程为 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1 \cdot x_2=0$.

已知 $\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1 \cdot x_2=q, \end{cases}$ 则两根为 x_1, x_2 的一元二次方程是 $x^2+px+q=0$.

总结升华

知能提升

$ax^2 + bx + c = 0$ 根的讨论

1. 若有两个实数根
   - $a \neq 0$，且 $\triangle \geqslant 0$.
2. 若有实数根，则分两种情况：
   - $a \neq 0$，且 $\triangle \geqslant 0$.　一元二次方程
   - $a = 0$　一元一次方程

学习误区

1、运用根的判别式时，注意二次项系数不为0，并且各项系数必须是实数.

2、运用根与系数的关系求方程中字母系数的取值时，忽视用 $\triangle = b^2 - 4ac$ 来检验结果的正确性.

学法指导

根与系数的关系的应用

1、已知方程的一根，求另一根或方程中的未知系数.

2、不解方程，求出与方程两根有关的代数式的值.

3、不解方程，判断根的符号和性质.

4、已知两根（或两根的和与积），求这个方程.

5、已知两数的和与积，求这两个数.

6、求作方程，使它的两根与已知方程的两根有某些特殊关系.

7、解某些特殊的方程组.

用 x^1+x^2, $x^1 \cdot x^2$ 表示下列式子

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$

$\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$

判别式的应用

1、不解方程，判断一元二次方程根的情况.

2、确定一元二次方程中字母系数的取值范围.

3、确定一元二次方程中字母系数的值.

4、检验运算结果是否产生增根.

5、由判别式构造一元二次方程进行求值、证明.

初中数学　第二章　方程与不等式　第六节　列方程解应用题

学习误区

1、设未知数要恰当
- 便于由所设未知数列方程.
- 使所列方程简单易解.

2、由等量关系列方程时
- 当直接设元较困难时，可间接设元.
- 方程两边必须是同一类量.
- 单位要统一

3、所解得的方程的解不一定是实际问题的解，应注意检验，舍去不合题意的解.

知能提升

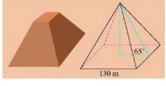
- 仔细审题找等量，熟记各种关系式；
- 直接间接设未知，根据题意列方程；
- 认真解答莫出错，隐含条件不放过；
- 作答之间要检验，舍去不合题意量.

总结升华

知识梳理

基本类型

- 和差倍分问题
- 体积变化问题
- 行程问题
- 劳动力调配问题
- 工程问题
- 利润问题
- 数字问题



解应用题步骤

1. 审　审题，弄清题意与题目中的数量关系.
2. 找　找出能够表示应用题全部含义的相等关系.
3. 设　设出未知数.
4. 列　根据等量关系列方程（组）.
5. 解　解方程（组）求出未知数的值.
6. 验　检验所求结果是否符合题意.
7. 答　回答题目所求的问题.

学法指导

行程问题的等量关系

1.相遇问题
- 全路程＝甲走的路程+乙走的路程

2.追及问题
- 相距路程＝快者所走路程−慢者所走路程

3.水（空）中航行问题
- 逆水（风）速度＝静水（无风）速度−水速（风速）
- 顺水（风）速度＝静水（无风）速度+水速（风速）

4.路程＝速度×时间

工程问题的等量关系

1、工作量=效率×时间.

2、甲的工作量+乙的工作量=甲乙合作的工作量.

浓度问题的等量关系

1、溶质=溶液×浓度.

2、浓度=$\frac{\text{溶质质量}}{\text{溶液质量}}\times 100\%$.

3、溶液质量=溶剂质量+溶质质量.

数字问题的等量关系

n位数：$\overline{a_1a_2\cdots a_n}=a_1\times 10^{n-1}+a_2\times 10^{n-2}+\cdots+a_n$.

握手问题的等量关系

握手次数=$\frac{n(n-1)}{2}$（其中n为总人数）.

增长率问题的等量关系

$A=a(1+x)^n$（A为增长后的量，a为增长前的量，n为连续增长的时间，x为连续增长率）.

利润问题的等量关系

$\frac{\text{商品利润}}{\text{商品进价}}$=商品利润率

初中数学　第二章　方程与不等式　第七节　分式方程

学习误区

- 1、漏乘常数项.
- 2、忽视分母的性质符号.
- 3、忽视检验，急于求成.
- 4、违背等式性质.
- 5、实际问题中忽略单位的统一与验证.

知能提升

- 分式拆项技巧
  - $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}$
  - $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$
- 分式方程的增根
  - 1、增根是分式方程去分母后整式方程的某个根，但它使分式方程的某个分母为0，故称为原方程的增根.
  - 2、产生原因：是解分式方程第一步“去分母”造成的.所乘的最简公分母的值不为0时，整式方程与原分式方程同解；否则为增根.

总结升华

知识梳理

- 定义
  - 分母中含有未知数的方程叫分式方程，如$\frac{A}{B}=0$（B中含未知数）.
- 解法
  - 1、去分母：把方程两边都乘最简公分母，把分式方程化为整式方程.
  - 2、解整式方程.
  - 3、检验：把整式方程的解代入最简公分母，使最简公分母不为0的解是原方程的解；使最简公分母为0的解不是原方程的解，是增根.
  - 增根　既是分式方程化为整式方程的解，又是使分式方程的分母为0的值.
- 应用
  - 1.方程的解与系数的关系
    - (1)由增根确定字母系数的值；
    - (2)由解的其他特征确定字母系数的值.
  - 2.实际问题
    - (1)工程问题 工作总量=工作效率×工作时间；
    - (2)行程问题 路程=速度×时间；
    - (3)浓度问题 浓度=$\frac{\text{溶质质量}}{\text{溶液质量}}\times100\%$

学法指导

- 分式方程与整式方程的区别
  - 分式方程是分母中含有未知数的方程.
- 分式方程的解法
  - 按解分式方程的步骤进行.
  - 观察方程特点，寻求简便解法.
    - 拆分原分式.
  - 解含字母系数的分式方程.
    - 挖掘隐含条件，解法与一般步骤相同.
    - 通过阅读，掌握特殊方法.
- 解分式方程应注意
  - 注意找出最简公分母.
  - 注意去分母时不要漏乘项.
  - 注意检验.
- 解分式方程应用题的步骤
  - 1. 审　审题，弄清题意与题目中的数量关系.
  - 2. 找　找出能够表示应用题全部含义的相等关系.
  - 3. 设　设出未知数.
  - 4. 列　根据等量关系列分式方程（组）.
  - 5. 解　解分式方程（组）求出未知数的值.
  - 6. 验　检验所求结果是否符合题意.
  - 7. 答　回答题目所求的问题.

初中数学　第二章　方程与不等式　第八节　一元一次不等式和不等式组

总结升华

学习误区

- 解方程与解不等式
  - 相同
    - 1、在方程或不等式两边都加上（或减去）同一个数或整式，方程或不等式仍成立.
    - 2、在方程或不等式两边都乘（或除以）同一个正数，方程或不等式仍成立.
  - 相异
    - 在方程两边都乘（或除以）同一个负数，方程仍成立.
    - 在不等式两边都乘（或除以）同一个负数，不等号要改变方向.
- 知能提升
  - 解不等式组求“公共部分”口诀
    - 同大取大，同小取小，大小小大中间夹，大大小小无解答.

知识梳理

- 概念
  - 不等式
    - 用不等号“>”、“<”、“≥”、“≤”、“≠”表示不等关系的式子.
  - 一元一次不等式
    - 不等号两边都是整式.
    - 只含有一个未知数.
    - 未知数的最高次数是1次.
  - 一元一次不等式组
    - 几个一元一次不等式所组成的不等式组.
- 性质
  - 不等式的性质
    - 若 $a>b$，则 $a\pm c>b\pm c$.
    - 若 $a>b,c>0$，则 $ac>bc,\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.
    - 若 $a>b,c<0$，则 $ac<bc,\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.
- 解集
  - 不等式的解集
    - 由不等式的所有解组成的集合
  - 一元一次不等式组的解集
    - 几个不等式解集的公共部分
- 解法
  - 不等式的解法
    - 依据
      - 不等式的性质.
    - 步骤
      - ①去分母，
      - ②去括号，
      - ③移项，
      - ④合并同类项，
      - ⑤未知数系数化为1.
  - 一元一次不等式组的解集
    - 1、分别求出不等式组中各个不等式的解集.
    - 2、利用数轴求出这些不等式的解集的公共部分.

学法指导

- 概念和性质
  - 不等式的概念
    - 辨别不等式.
    - 根据题意，列出不等式.
  - 不等式的解集
    - 解与解集的区别与联系.
    - 数轴与不等式（组）解集的关系.
  - 不等式的性质
    - 不等式的变形.
    - 确定简单的不等式的解或解集.
- 求不等式（组）的解集
  - 不等式解法
    - 与一元一次方程的解法类似，所不同的是“未知数系数化1”要注意不等号的方向（乘除负数不等号要反向）.
  - 连写不等式的解法
    - 转化为两个不等式组成的不等式组.
  - 解字母系数的一元一次不等式
    - 都可化为$ax>b$(或$ax<b$)的形式.
    - (1)$a>0$, $x>\frac{b}{a}$.
    - (2)$a<0$, $x<\frac{b}{a}$.
    - (3)$a=0$, $b\geqslant 0$，x无解；$b<0$,x为任何实数.
- 不等式组解集

不等式组（$a>b$）	解集	数轴表示
$\begin{cases}x>a\\x>b\end{cases}$	$x>a$	
$\begin{cases}x<a\\x<b\end{cases}$	$x<b$	
$\begin{cases}x<a\\x>b\end{cases}$	$b<x<a$	
$\begin{cases}x>a\\x<b\end{cases}$	无解	

初中数学　第三章　函数及其图像　第一节　平面直角坐标系与函数

知识梳理

函数概念

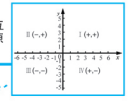
- 定义：在某变化过程中有两个量x,y.若对于x的每个值，y都有唯一的值与其对应，则称x是自变量，y是x的函数.
- 自变量取值范围：使函数有意义的自变量的取值集合.
- 函数取值范围：自变量在某一范围取值，函数值的全体.

函数表示

- 解析法：用数学式子表示两个变量的函数关系.
- 列表法：通过列表格表示函数与自变量的对应数值.
- 图像法：自变量与函数的每对对应值分别作为点的横坐标与纵坐标，在坐标平面内描出相应的点，用这些对应点连成的图形.

坐标系概念

- 定义：在平面内，两条互相垂直且有公共原点的数轴组成.



坐标平面上的点与有序实数对一一对应

- 特殊点坐标(a,b)
  - 在x轴上，$b=0$.
  - 在y轴上，$a=0$.
  - 一，三象限的角平分线上，$a=b$.
  - 二，四象限角平分线上，$a=-b$.
- 对称点坐标的特征(a,b)
  - 关于x轴的对称点$(a,-b)$.
  - 关于y轴的对称点$(-a,b)$.
  - 关于原点的对称点$(-a,-b)$.

平面内两点间距离

- x轴上两点$M_1(x_1,0)$，$M_2(x_2,0)$的距离$|M_1M_2|=|x_1-x_2|$；
  y轴上两点$N_1(0,y_1)$，$N_2(0,y_2)$的距离$|N_1N_2|=|y_1-y_2|$.
- 直角坐标平面内，点$P(x,y)$到x轴的距离为$|y|$,到y轴的距离为$|x|$.
- 平面内两点$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$的距离为$|PQ|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

总结升华

学习误区

- 平面直角坐标系
  - 对有序实数的定义理解不透，横、纵坐标位置易颠倒.
  - 对点的坐标特点掌握不熟练，横、纵坐标符号易出错.
  - 对一个图形上下平移和左右平移分不清导致错误.
- 自变量的取值范围
  - 只考虑部分而忽视了整体.
  - 只考虑整体而忽视了部分.
  - 忽视问题的实际意义.
  - 忽视隐含条件.

知能提升

- 用坐标表示地理位置
  - 建立直角坐标系
  - 确定比例尺，标注长度单位
  - 按题意确定各地位置
  - 写出各地坐标
- 仅用一个数不能确定点的位置，一对实数确定一个点的位置，这对实数是有序的.
- 自变量取值范围
  - 确保实际问题有意义.
  - 确保几何图形有意义.
  - 确保函数式自身有意义.
- 平移：将点(x,y)向左或右平移a个单位长度，得到对应点的坐标为$(x-a,y)$或$(x+a,y)$；向上或下平移a个单位长度，得到点的坐标为$(x,y-a)$或$(x,y+a)$.

学法指导

自变量的取值范围

自变量的取值范围是个难点做题时一定要考虑全面

- 确保实际问题有意义. — 与实际问题有关
- 使整个关系有意义. — 组合型
- 确保几何图形存在. — 与几何图形相关
- 被开方数为非负数. — 算术平方根型
- 分母不能为0. — 分式型
- 自变量取值为全体实数. — 整式型

平面直角坐标系

- 已知点的坐标在坐标系内描点，先找出横纵坐标分别在x,y轴上的位置，再作x,y轴的垂线，交点即是.
- 已知坐标平面内的点，求其坐标，向x,y轴作垂线，找到垂足坐标，按顺序写成(a,b).
- 点的坐标符合某些条件，确定位置：弄清各象限及特殊点，坐标特征
- 求某些点的对称点：弄清对称点的坐标特点.

点与点间的距离

- 平面内的点 P 与有序实数对（x, y）一一对应.
- 将点的坐标代入公式即可求得.

函数的三要素

- 定义域：使函数有意义的值的集合.
- 值域：自变量在某一范围取值，对应的函数值全体.
- 对应法则：从自变量到函数的一个对应关系.

初中数学　第三章　函数及其图像　第二节　一次函数　第三节　反比例函数

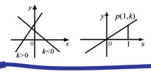
一次函数

总结升华

- 学习误区
  - 误认为正比例函数不是一次函数.
  - 点的坐标与线段的长度关系不清致误.
  - 实际问题容易忽略自变量取值范围及隐含条件.
- 知能提升
  - 直线 $y=kx+b$ 与 x 轴交点的横坐标是方程 $kx+b=0$ 的解.
  - 解不等式 $kx+b<0$,$kx+b>0$ 可以看做 $y=kx+b$ 图像在 x 轴上方或下方的取值范围.
  - 两直线 $y=k_1x+b_1, y=k_2x+b_2$ 交点坐标是方程组 $\begin{cases} y=k_1x+b_1 \\ y=k_2x+b_2 \end{cases}$ 的解.

知识梳理

- 定义
  - 一次函数　形如：$y=kx+b$(b是常数$k\neq0$).
  - 正比例函数　特别地，当$b=0$时，$y=kx(k\neq0)$
- 图像



一次函数是经过点$(0,b)$和点$\left(-\frac{b}{k},0\right)$的一条直线

- 性质
  - 当$k>0$，$b>0$时，y随x的增大而增大，且图像经过第一、二、三象限.
  - 当$k>0$，$b<0$时，y随x的增大而增大，且图像经过第一、三、四象限.
  - 当$k<0$，$b>0$时，y随x的增大而减小，且图像经过第一、二、四象限.
  - 当$k<0$，$b<0$时，y随x的增大而减小，且图像经过第二、三、四象限.
  - $b>0$时，则直线与y轴交于正半轴；$b<0$时，则直线与y轴交于负半轴；$b=0$时，则直线过原点.

学法指导

- 函数解析式
  - 设解析式为 $y=kx+b$.
  - 由已知条件求出未知系数k,b.
  - 将k,b的值带入解析式 $y=kx+b$.
- 函数交点
  - 令$x=0$可得到直线 $y=kx+b$与y轴交点为$(0,b)$.
  - 令$y=0$可得到直线 $y=kx+b$ 与x轴交点为 $\left(\frac{-b}{k},0\right)$.
  - 求两条直线 $y=k_1x+b_1, y=k_2x+b_2$ 的交点坐标 可以联立两个式子解方程组得到.
- 函数图像
  - 图像是一条经过$(0,b)$,$(-\frac{b}{k},0)$点的直线.
  - k—决定直线的上升趋势和下降趋势.
  - b—是直线与y轴交点的纵坐标.
  - 直线$y=kx+b$的位置由k和b的符号确定.
- 函数性质
  - $k_1=k_2$, $b_1\neq b_2$时两直线 $y=k_1x+b_1, y=k_2x+b_2$ 平行.
  - $k>0$—y随x的增大而增大.
  - $k<0$—y随x的增大而减小.

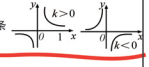
反比例函数

总结升华

- 学习误区
  - 反比关系的两个变量不一定是反比例函数.
  - 研究反比例函数的增减性不注意借助其图像.
  - 不注意反比例函数与正比例函数之间的对比.
  - 不重视数形结合，使简单问题复杂化.
- 知能提升
  - 从反比例函数上任一点引x,y轴的垂线所围得矩形面积为$|k|$.
  - 以双曲线上任意一点到原点的距离为斜边，且直角顶点在坐标轴上的直角三角形的面积为$\frac{1}{2}|k|$.

知识梳理

- 定义　如果$y=\frac{k}{x}(k\neq0)$，那么y叫做x的反比例函数.
- 图像　反比例函数是由两条曲线组成的双曲线.



- 性质
  - 双曲线两分支与x,y轴无限接近，但永远不会与坐标轴相交.
  - 当$k>0$时，双曲线位于一、三象限，y随x的增大而减小.
  - 当$k<0$时，双曲线位于二、四象限，y随x的增大而增大.

学法指导

- 函数性质
  - 理解图像性质时应特别注意“在每个象限内”不可丢掉.
  - 反比例函数的图像是双曲线.
  - k的符号决定双曲线的位置与函数的增减性.
- 确定表达式
  - 一般方法为待定系数法.
  - 只知道x与y的一对对应值，即可求出k值.
- 函数概念
  - 反比例函数的一般形式：$y=\frac{k}{x}(k\neq0)$
  - 变形式：$y=kx^{-1}(k\neq0)$
  - 常数$k\neq0$是反比例函数定义的组成部分.
  - 自变量和函数的取值范围均为不等于0的一切实数.

初中数学　第三章　函数及其图像　第四节　二次函数

总结升华　知识梳理

知能提升

对称轴

点 (x_1,y_0)，(x_2,y_0) 在抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 上，

则对称轴为直线 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

交点

y=0,求出与x轴交点 x_1，x_2 .

x=0,求出与y轴的交点 $(0,c)$.

用公式求得顶点 $\left(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

五距

抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$

与x轴的两交点到原点的距离分别为 $|x_1|$，$|x_2|$.

与y轴的交点到原点的距离为 $|c|$.

顶点到x轴的距离为 $\left|\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right|$.

顶点到y轴距离 $\left|\dfrac{b}{2a}\right|$

与x轴的两交点间的距离为 $|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$

解决二次函数的问题时，最好利用数形结合的方法

学习误区

漏掉“二次项系数不为0”这个隐含条件.

易将 $y=a(x-h)^2+k$ 中h的符号弄错.

在 a>0时，函数有最小值.
在 a<0时，函数有最大值.

函数在对称轴左、右两侧的增减性相反.

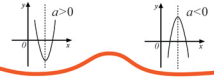
顶点纵坐标切写成：$\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

知识梳理

定义

形如 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的函数叫做二次函数.

图像



性质

开口方向

a>0时，开口向上，并且向上无限延伸.

a<0时，开口向下，并且向下无限延伸.

顶点坐标 $\left(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴 $x=\dfrac{-b}{2a}$.

增减性

	$x<-\dfrac{b}{2a}$	$x>-\dfrac{b}{2a}$
$a>0$	y随x的增大而减小	y随x的增大而增大
$a<0$	y随x的增大而增大	y随x的增大而减小

最值

$a>0$, $x=-\dfrac{b}{2a}$, $y_{min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

$a<0$, $x=-\dfrac{b}{2a}$, $y_{max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

表达式

一般式 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$.

顶点式 $y=a(x-h)^2+k$，

(h,k) 是抛物线的顶点.

交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，

x_1，x_2 是抛物线与x轴交点的横坐标.

二次函数比一次函数复杂.应更加了解其基本性质，方便做题

学法指导

图像问题

图像画法

描点法：通常取与抛物线的对称轴相对称的七个点（含顶点）.

交点

$\triangle$>0,与x轴有两个交点；$\triangle$<0,与x轴无交点；$\triangle$=0,与x轴有一个交点.

c>0,与y轴正半轴相交；c<0，与y轴负半轴相交；c=0，与原点相交.

开口方向

a>0，抛物线开口向上；a<0，抛物线开口向下.

对称轴

对称轴 $x=\dfrac{-b}{2a}$，a,b同号在y轴左侧，a,b异号在y轴右侧.

应用题

函数与方程的关系

$y=ax^2+bx+c$在函数值 y=0时为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$.
方程 $ax^2+bx+c=0$ 解的个数为函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与x轴交点的个数.

$\triangle$>0，抛物线与x轴相交；
$\triangle$<0，抛物线与x轴相离；
$\triangle$=0，抛物线与x轴相切.

理解问题，确立变量与常量.

用函数关系式表示它们之间的关系.

利用二次函数的性质进行求解.

检验结果的合理性.

求解析式

待定系数法求解.

灵活运用三种表达式：一般式，顶点式，交点式.

一般形式

一般写法

形如 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 是最基本的形式.

注意事项

$a\neq0$; b,c可以为0，也可以不为0 .自变量的取值范围是实数.

图像平移

平移前后特征

平移前后的图像，其形状、大小相同，只是位置不同.

平移前后的解析式中，a的值不变.

平移后解析式确定

平移后解析式的确定：左加右减自变量，上加下减常数项.

初中数学　第四章　图形的初步认识

总结升华

知能提升

- 学习误区
  - 添加辅助线：平行线
    - 会画
    - 平行线 — 中线 — 角平分线 — 线段中点
    - 构造可以运用平行线性质和判断的条件.
    - 为平行线的其他性质打基础.
  - 直线、射线、线段概念不清.
  - “三线八角”中的三类角不能区分.
  - 命题改写不能区分条件与结论.

学法指导

- 常见的平面图形
  - 由线段围成的封闭图形
  - 由曲线围成的封闭图形
    - 如圆、椭圆……
  - 由直线和曲线围成的封闭图形
    - 如三角形、四边形、五边形……
    - 如扇形、弓形……
- 线段计算与应用
  - 概念
    - 直线、射线、线段间的位置关系.
    - 点和线的位置关系.
    - 准确数出图形中直线、线段、射线的条数.
  - 几何语言与图形
    - 相互转化
  - 线段比较大小
    - 叠合法 — 度量法
    - 用计算方法判断大小
  - 线段的和差倍分
    - 正确运用线段等分点的性质
    - 能根据题意画出图形
    - 较复杂的题目能列方程求解
  - 线段公理
    - 会求两点距离
    - 会求实际问题中的最短距离
- 角
  - 定义
    - 定义1为静态定义
    - 定义2为动态定义
  - 特点
    - 两条射线.
    - 两条射线有公共点.
    - 角的大小与边的长短无关，只与两射线张开的幅度大小有关.
    - 角的大小一旦确定，就不因图形的位置、放大或缩小而改变.
  - 画法
    - 尺规作图：作一个角等于已知角.
    - 用量角器画小于平角的任一角.
    - 用三角板画某些特殊度数的角.
  - 运算
    - 度与度、分、秒的互化. $1^\circ=60'$，$1'=60''$.
    - 度、分、秒的四则运算.
    - 实际应用：钟表问题.
- 三线八角的识别
  - 平行线
    - 平行线的画法
    - 判定与性质的综合应用
      - 求角的度数.
      - 证明直线平行.
      - 平行公理的应用.
      - 长方形的翻折.
  - 相交线
    - 斜交
      - 对顶角、邻补角
        - 概念的辨析
        - 性质的应用
    - 垂直
      - 应用 — 垂直的定义、性质求角度.
      - 作图 — 过直线上（或外）一点，作已知直线的垂线.
      - 垂线段性质在实际中的应用.
- 命题与定理
  - 判断所给语句是否为命题.
  - 判断命题的真假.
  - 将命题改写为“如果……那么……”的形式.

知识梳理

多姿多彩的图形

- 几何图形
  - 平面图形 — 图形的各部分在同一平面内.
  - 立体图形 — 图形的各部分不都在同一平面内.
- 点、线面、体
  - 几何体简称为体.
  - 面动成体 — 包围着体的是面，分为平面和曲面.
  - 线动成面 — 面和面相交的地方形成线.
  - 点动成线 — 线和线相交的地方是点.

直线、射线线段

- 直线
  - 表示方法 — 直线l或直线AB.
  - 公理 — 两点确定一条直线.
  - 点和直线的位置关系
    - 点在直线上
    - 点在直线外.
  - 同一平面内直线间的关系
    - 相交 — 两条不同的直线有一个公共点.
    - 平行 — 两条直线没有公共点.
- 射线
  - 概念 — 直线上一点和它一旁的部分.
  - 表示方法 — 射线OA或射线l.
  - 概念 — 直线上两个点和它们之间的部分.
- 线段
  - 表示方法 — 线段a或线段AB.
  - 公理 — 两点之间线段最短.
  - 两点间的距离 — 连结两点间的线段长.
  - 线段的中点 — 把一条线段分成两条相等线段的点.

角

- 定义
  - 1.具有公共顶点的两条射线组成的图形.
  - 2.一条射线绕着端点从起始位置旋转到终止位置所形成的图形.
  - 表示方法 — $\angle O=\angle 1=\angle \alpha=\angle AOB$
- 角的度量
  - 方法 — 使用量角器度量角度.
  - 度量单位 — 度、分、秒.
- 角的运算 — 角平分线 — 把一个角分成两个相等的角的射线.
- 角的比较
  - 角的和差倍分.
  - 度量比较法 — 叠合比较法.
- 余角和补角
  - 余角 — 两个角的和为90° — 互余
  - 补角 — 两个角的和为180° — 互补
  - 性质 — 等角的余（或补）角相等.

两条直线相交

- 方位角
  - 以正北、正南为基准，用向东或向西旋转的角度表示方向.
  - 依据“上北、下南、左西、右东”建立方向坐标.
- 斜交
  - 邻补角
    - 定义 — 有一条公共边，并且另一边互为反向延长线的两角.
    - 性质 — 两角相加为180°.
  - 对顶角
    - 定义 — 一个角的两边分别是另一个角的两边的反向延长线.
    - 性质 — 对顶角相等.
- 垂直
  - 垂线段 — 经过直线外一点画这条直线的垂线，点与垂足之间的线段.
  - 点到直线的距离 — 垂线段的长 — 垂线段最短

两条直线被第三条直线所截

- 同位角 — 内错角 — 同旁内角

平行线

- “三线八角”
  - 定义 — 在同一平面内，不相交的两条直线. 符号“//”表示
- 平行公理
  - 公理 — 经过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行.
  - 推论 — 若两条直线都与第三条直线平行，则这两条直线平行.
- 判定
  - 同位角相等，两直线平行.
  - 内错角相等，两直线平行.
  - 同旁内角互补，两直线平行.
  - 垂直于同一条直线的两条直线平行.
- 性质
  - 两直线平行
    - 同位角相等
    - 内错角相等
    - 同旁内角互补

命题与定理

- 判断一种事情的语句
- 命题
  - 真命题：正确的命题
    - 公理 — 人们长期实践总结出来的真命题.
    - 定理 — 通过证明的真命题.
  - 假命题：错误的命题

初中数学　第五章　三角形　第一节　三角形及全等三角形

总结升华

学习误区

1. 全等三角形的判定方法的误区
   - 证明中，把“SSA”写成“SAS”，即得出结论，这里“A”不是“S”的夹角，而是某一边的对角.
2. 三角形判断
   - 在判断三线段能否构成三角形时，仅两边之和大于第三边不一定能构成三角形；还需考虑两边之差小于第三边.

知能提升

1. 三角形只需验证最短两边的和大于第三边即可.
2. 利用三角形全等来证明线段的“和”“差”，一般采用“截长补短”法.
3. 三角形的外角定理及推论，是“角”转换的有效工具.
4. 构造三角形，利用三角形全等，是证明线段相等或角相等的“常规”的方法.
5. 把三角形的中线加倍延长，是解决涉及“中线”这个条件的问题常见技巧.

知识梳理

基本概念

- 定义
  - 不在同一直线上的三条线段首尾顺次相连所组成的图形.
  - 三要素：边 → 内角 → 顶点
- 四线
  - 高线：顶点向它的对边（或其延长线）引垂线，顶点与垂足之间的线段叫做三角形的高.
  - 中线：连结一顶点和它对边中点的线段叫做三角形的中线.
  - 角平分线：一个角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点与交点之间的线段.
  - 中位线
    - 定义：三角形两边中点之间的线段.
    - 性质：三角形的中位线平行且等于第三边的一半.
- 关系
  - 边边：两边之和＞第三边，两边之差＜第三边.
  - 边角：大边对大角，等边对等角.
  - 角角
    - 内角和定理：三角形内角和=180°.
    - 外角定理：外角=与它不相邻的两内角和. 外角>任一和它不相邻的内角. 外角+邻角=180°，外角和=360°.
- 分类
  - 按边分
    - 不等腰：三边不等
    - 等腰：仅两边等
    - 等边：三边等
  - 按角分
    - 锐角：三锐角
    - 钝角：一个钝角
    - 直角：一个直角
- 全等
  - 定义：能完全重合的两个三角形叫做全等三角形.
  - 性质：①对应边相等. ②对应角相等. ③对应角平分线、中线、高相等. ④周长、面积相等.
  - 判定
    - 一般三角形：SAS，ASA，AAS，SSS
    - 直角三角形：HL

学法指导

三角形的三边关系

- 三角形的两边之和大于第三边，两边之差小于第三边
  - 注意：①它是一个不等关系，是证明线段不等关系的一个重要思想方法. ②证明有关线段的不等关系，首先要把有关线段转化在同一个三角形内.

角的关系应用

- 三角形的内角和是180°应用
  - a.一般三角形
    - 1.结合定理，确定内角的范围.
    - 2.已知两个内角，求第三个内角.
    - 3.已知内角的同角关系，运用方程的思想求各角度数.
  - b.特殊三角形
    - 1.直角△，两锐角互余.
    - 2.等边△，三角分别为60°.
    - 3.等腰△，底角相等.
    - 4.由已知求出△内角的度数，判断△形状.
- 三角形外角
  - a.外角的判断标准
    - 1.角的顶点在△的顶点上.
    - 2.角的一边与△一边重合.
    - 3.角的另一边是△另一边的延长线.
  - b.运用外角的性质
    - 构造△外角，验证是否符合设计要求
  - c.实际应用
    - 1.求△内角的度数.
    - 2.证明角的相等与不等关系.
    - 3. △外角和与内角和相结合，求角度.

中线、角平分线、高线

1. 三角形中线、角平分线都在三角形内，相交于三角形内的一点
2. 三角形的高线画法，如下图所示
   - 锐角三角形：三条高线在形内.
   - 直角三角形：三条高线交点在形上(直角顶点).
   - 钝角三角形：三条高线有两条在形外.

全等三角形

1. 注意问题
   - （1）区分“对应边”与“对边”“对应角”与“对角”.
   - （2）符号“≌”的含义：“∽”表示形状相同，“=”表示大小相等.
   - （3）表示两个△全等时，对应顶点的字母要写在对应的位置上.
2. 常见的全等图形：平移型　旋转型　翻折型
3. 证明△全等应遵循的原则
   - （1）指明在哪两个△中.
   - （2）按边角顺序列出全等的三个条件（Rt△两个条件），并用大括号括起来.
   - （3）写出结论，两△对应顶点的字母要写在对应的位置上.
   - （4）证明过程要步步有依据.
4. 判断△全等的基本思路
   - （1）有两边对应相等时，找夹角或第三边相等.
   - （2）有一边和一角对应相等时，找另一边相等或夹等角的另一边相等.
   - （3）有两个角相等时，找一对对应边相等.

初中数学　第五章　三角形　第二节　特殊三角形与勾股定理

总结升华

学习误区

1. 混淆等腰三角形的性质和判定.
2. 已知两边长，求直角三角形第三边长，容易漏掉一种情况.例，已知两边长是3和4，求直角三角形第三边长，往往只会得第三边长是5，而漏掉了$\sqrt{7}$这个结果.
3. 等腰三角形的“三线合一”是有条件，而等边三角形“三线合一”是无条件的，这点容易误解.

知能提升

等腰三角形的“三线合一”性质和它的对称性质结合起来理解.

等边三角形的判定，“有一个60°角的等腰三角形是等边三角形”，这个60°的角可以是顶角，也可以是底角.

勾股定理应用非常广泛，把有关已知量和未知量转化在同一个直角三角形中，应用勾股定理列方程,求出未知量.

注意：学习和应用此定理，一定要弄清“三线合一”的限定条件，灵活应用.

知识梳理

等腰三角形

一般等腰三角形

- 定义：有两边相等的三角形.
- 性质：(1)等边对等角.　(2)底边三线合一.
- 判定：定义法.　等角对等边.

等边三角形

- 定义：三边相等的三角形.
- 性质：(1)三边相等.　(2)三角均为60°.　(3)三线合一.
- 判定：(1)三角相等的三角形.　(2)一角为60°的等腰三角形.

直角三角形

- 定义：有一个90°角的三角形.
- 性质：(1)两锐角互余.　(2)斜边上的中线等于斜边的一半.　(3)30°角所对的直角边等于斜边的一半.　(4)勾股定理：两直角边a，b的平方和等于斜边c的平方，即 $a^2+b^2=c^2$.
- 判定：(1)定义法.　(2)两角互余的三角形.　(3)一边上的中线等于这边一半的三角形.　(4)勾股定理逆定理：若$a^2+b^2=c^2$，则是直角三角形.
- 结论：(1)勾股定理:$c^2=a^2+b^2$　(2)$AD=BD=CD=\frac{1}{2}AB$　(3)$\angle BAC+\angle ABC=90^\circ$

学法指导

等腰三角形的性质

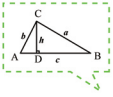
等腰三角形顶角的平分线和底边上的中线、高线重合，简称“三线合一”.

等腰三角形的性质与判定

它们是互逆定理，记忆时，扣住“等角”还是“等边”.“等角对等边”是判定，“等边对等角”是性质.

直角三角形

(1)运用直角三角形性质，应明确该三角形是直角三角形，明确斜边和直角边，灵活运用直角三角形的性质，特别是勾股定理.



(2)除掌握直角三角形常见性质外，还需掌握下面公式：

① $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\cdot b=\frac{1}{2}c\cdot h$，其中$a$、$b$为两角直边，$c$为斜边，$h$为斜边上的高，如图所示.

② 内切圆半径 $r=\frac{a+b-c}{2}$，外接圆半径：$R=\frac{c}{2}$ =斜边上的中线.

实际应用

1.爬行最短距离问题.
2.折叠问题.
3.实际问题中的长度计算.

勾股定理

1.由定理证明引申出的题目.
2.直接由定理计算开方求边长.
3.据定理列方程解题.
4.构造直角△，运用转化思想.

初中数学　第六章　四边形　第一节　多边形的概念及性质

总结升华

学习误区

- 不是在理解的基础上运用多边形的内角和公式.
- 已知一个多边形的内角和与外角和的关系，求边数的问题.
  - 却不知道多边形的外角和为多少？

知能提升

- 多边形的外角和为360°
  - 通常会用外角和与内角和的关系来求多边形的边数.
- 多边形的密铺问题
  - 单个多边形的密铺问题.
  - 多个正多边形的密铺问题.
  - 从形成镶嵌的某个顶点出发分析.
  - 它们的和为360°的倍数，即可镶嵌.
- 多边形的内角和公式：$(n-2)\times180°$.
  - 知道度数可求边数.
  - 知道边数可求度数.
- 熟记n边形的对角线公式：$\frac{n(n-3)}{2}$.

学法指导

- 多边形的密铺问题
  - 正方形、矩形、正三角形，正六边形等都能将地板铺满.
- 多边形问题转化为三角形或四边形问题
  - 连结对角线，将多边形分成若干个三角形.
  - 运用三角形性质转化多边形中的角.
  - 补全图形转化为四边形的问题.
- 多边形的内角和
  - 从一个顶点出发，连对角线.
  - 将四边形问题转化成三角形问题.
  - 每个三角形的内角和都等于180°.
  - 四边形的内角和等于360°.
  - 多边形的内角和等于$(n-2)\times180°$.
- n边形的对角线
  - n边形共有$\frac{n(n-3)}{2}$条对角线.
  - n边形的一个顶点可引$(n-3)$条对角线.
  - 这些对角线将多边形分成$(n-2)$个三角形.
- 四边形的外角和
  - 多边形的外角和等于360°.
- 推导
  - 每一个内角与相邻的一个外角组成一个平角.
  - 四个内角与相邻的四个外角组成四个平角.
  - 外角和等于四个平角的和减去内角和，等于360°.

知识梳理

- 多边形
  - 定义
    - 平面内，由不在一条直线上的一些线段首尾顺次连结而形成的封闭图形.
  - 分类
    - 按凹凸分
      - 凸多边形
      - 凹多边形
    - 按边数分
      - 三边形
      - 四边形
      - 五边形
      - 一类特殊多边形
        - 正多边形
          - 各边相等.
          - 各角相等.
  - 内角和
    - n边形的内角和等于$(n-2)\times180°$
      - 三角形的内角和等于180°.
    - 四边形的内角和等于360°
      - 任意一个四边形都可以通过连结对角线分割成两个三角形.
  - 外角和
    - n边形的外角和等于360°.
    - 四边形的外角和也等于360°.
- 镶嵌
  - 定义
    - 用一些不重叠摆放的多边形把平面的一部分完全覆盖.
  - 特征
    - 拼接在同一个点的各个角的和恰好等于360°.
    - 相邻的多边形有公共点.

初中数学　第六章　四边形　第二节　平行四边形

总结升华

知能提升

- 口诀
  - 要证平行四边形，两个条件才能行.
  - 一证对边（角）都相等,或证对边都平行.
  - 一组对边也可以，必须相等且平行.
  - 对角线是个宝，互相平分“跑不了”.
- 三角形中线
  - 三角形ABC中有中线AD，延长中线翻一倍,则$ABEC$为▱.

学习误区

- 搞错或弄混平行四边形的性质和定义.

学法指导

方法，规律，技巧

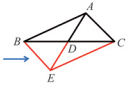
- 证两组对边分别相等的途径
  - 运用平移，旋转.
  - 三角形全等.
  - 线段和差.
  - 等腰三角形等角对等边.
- 证对角线互相平分
  - 运用三角形全等.
  - 线段等分.
  - 线段和差.

性质的应用

- 三角形的中位线定理
  - 确定边的平行关系.
  - 确定边的倍分关系.
- 证明
  - 联系全等三角形知识.
- 面积算法
  - 公式法
    - $S=ab$. a,b分别表示底和这一底上的高.
  - 转化法
    - 向三角形面积转化.

判定应用

- 探索平行四边形成立的条件
- 判定平行四边形
  - 若条件中涉及
  - 逆向思维
  - 角：考虑“两组对角分别相等（或边平行）”.
  - 对角线：考虑“对角线互相平分”.
  - 边：考虑“两组对边分别平行”或“一组对边平行且相等”.
  - 三角形中线：构造平行四边形.
    - AD为$\triangle ABC$的中线，延长AD至E，使$AD=DE$，则$ABEC$是平行四边形

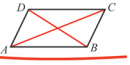


- 直接用于计算
  - 求角和边的大小.
  - 对角线范围的确定.
    - 据三角形三边关系解决

知识梳理

概念

- 定义
  - 两组对边分别平行的四边形
- 表示方法
  - ▱$ABCD$



- 对角线
  - 不相邻的两个顶点连成的线段AC，BD.

性质

- 对角相等.
- 邻角互补.
- 对边平行且相等.
- 两条对角线互相平分.
- 夹在两条平行线之间的平行线段相等.
- 是中心对称图形，对称中心是两条对角线的交点.

三角形的中位线

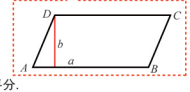
- 是常见的辅助线
- 定义
  - 连结三角形两边中点的线段.
- 定理
  - 三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半.

面积

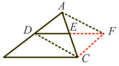
- $S=ab$. a,b分别表示底和这一底上的高.

判定

- 两组对边分别平行.
- 两组对边分别相等.
- 对角线互相平分.
- 一组对边平行且相等.



已知三角形的中位线



- 常作的辅助线
  - DE为$\triangle ABC$中位线,也为$\triangle ADC$的中线.
  - 作CF∥AB交DE延长线于E或延长DE至F,使$DE=EF$.
  - 目的
    - $\triangle ADE\cong\triangle CFE$.
    - 四边形$ADCF$为▱.

初中数学　第六章　四边形　第三节　特殊的平行四边形

总结升华

知识提升

- 平移或旋转将分散的条件集中.
- 在已知图形中局部构造特殊的图形.
- 将特殊四边形的问题转化为三角形.

学习误区

- 混淆特殊四边形的性质及判定.
- 直角三角形斜边中线的性质是矩形的推论，错用于一般的三角形.

学法指导

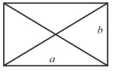
- 在解决特殊的四边形时，一定要仔细观察，然后选择合适方法，做题时一定要仔细.

综合应用

- 探索新型四边形
  - 抓住题目的特点.
  - 理解基本的定义.
- 折叠问题
  - 运用原有特殊四边形的性质.
  - 寻求折叠前后不变的量.
- 特殊方法求面积
  - 转化思想，探求不规则图形面积.
  - 设未知数，列方程求解.
- 正方形
  - 判定
    - 从四边形的角度
      - 有一组邻边相等，有三个角是直角四边形.
      - 对角线互相垂直平分且相等的四边形.
    - 从矩形的角度
      - 有一组邻边相等的矩形.
      - 对角线互相垂直的矩形.
    - 从菱形角度
      - 有一个角为直角的菱形.
      - 对角线相等的菱形.
  - 面积
    - $S=a^2$
- 菱形
  - 判定
    - 四条边都相等的四边形是菱形.
    - 有一条对角线平分一组对角的平行四边形是菱形.
    - 对角线互相垂直平分的平行四边形是菱形.
    - 有一组邻边相等的平行四边形是菱形.
  - 应用
    - 已知两对角线可求面积及边长.
    - 已知一边和一条对角线，可求另一条对角线.
    - 已知一边和一特殊的内角，可求对角线及面积.
- 矩形
  - 判定
    - 对角线相等的平行四边形.
    - 有一个角是直角的平行四边形.
  - 应用
    - 运用勾股定理求边或对角线的长.
    - 运用对角线相等证明四个小三角形的面积相等.

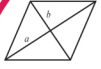
知识梳理

矩形



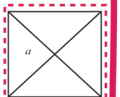
- 定义　有一个角为直角的平行四边形是矩形.
- 性质
  - 具有平行四边形的所有性质.
  - 四个角是都是直角.
  - 对角线相等.
  - 既是中心对称图形，又是轴对称图形.
- 面积：$S=ab$　a,b分别表示长和宽.

菱形



- 定义　有一组邻边相等的平行四边形是菱形.
- 性质
  - 具有平行四边形的所有性质.
  - 四边都相等.
  - 两条对角线互相垂直，并且每条对角线平分一组对角.
  - 既是中心对称图形，又是轴对称图形.
- 面积　$S=\frac{1}{2}ab$, a,b分别表示两条对角线的长.
- 推广：任意对角线互相垂直的四边形.
- 关系

正方形



- 定义
  1. 四边相等，四个角是直角的四边形是正方形.
  2. 有一组邻边相等且有一个角是直角的平行四边形是正方形.
  3. 一组邻边相等的矩形是正方形.
  4. 有一个角为直角的菱形是正方形.
  5. 对角线平分且相等，且交角为直角的四边形是正方形.
- 性质
  - 具有平行四边形，菱形，矩形的所有性质.
  - 对边平行，四边相等，邻边垂直，角=90°.
  - 对角线相等、互相垂直平分，每条对角线平分一组对角.
  - 既是中心对称图形，又是轴对称图形.

面积$S=a^2$，a表示正方形的边长.

初中数学　第六章　四边形　第四节　梯形

学习误区

- 理解错误
  - 将梯形问题转化成三角形或平行四边形的问题时，辅助线添加错误.
- 错误原因
  - “等腰梯形同一底上的两个角相等”.
    错误说成：“等腰梯形两底上的角相等”或等腰梯形底角相等.
  - 梯形底有上底、下底之分.
  - 强调“同一底”.

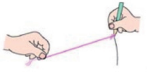
总结升华

- 知能提升
  - 口诀
    - 平移梯形对角线，两底之和成一线；
      平行移动一条腰，两腰同一“△”现；
      延长两腰交一点，“△”中有平行线；
      作出梯形两高线，矩形呈现在眼前；
      已知腰上一中线，莫忘作出“中位线”.
- 学法指导
  - 实践探究
    - 图形重心
    - 梯形的镶嵌
    - 折叠
    - 操作
      - 特殊梯形的形成.
      - 梯形裁剪拼出其他四边形.
  - 一般问题
    - 面积计算
      - 公式法.
      - 割补法，化为其他特殊图形求解.
    - 中位线
      - 利用定理，求中位线长.
      - 转化为三角形中位线求.
  - 等腰梯形性质判定的应用
    - 确定角度及边长
      - 先判断是梯形.
    - 判断梯形是等腰梯形
      - 两腰相等.
      - 再判断
        - 对角线相等.
        - 同一底上两底角相等.
  - 辅助线作法
    - 中位线
      - 连结上底一端和另一腰的中点并延长交下底的延长线于一点.
      - 过一腰的中点作另一腰的平行线.
    - 平移
      - 移对角线
        - 使两条对角线在同一个三角形中.
      - 移腰
    - 延腰
      - 构造具有公共角的两个三角形.
    - 作高
      - 使两腰在两个直角三角形中.
  - 梯形问题转化成三角形或四边形的问题
    - 平移梯形一腰，将梯形分成三角形与平行四边形.
    - 当梯形底角为特殊角时，常作高，将梯形分为直角三角形与直角梯形.
    - 当梯形对角线的夹角为特殊值时，常平移对角线将梯形分成三角形与平行四边形.
    - 当为直角梯形时，常作高线，将梯形分成矩形和直角三角形.

知识梳理

- 梯形
  - 定义
    - 一组对边平行，另一组对边不平行的四边形.
  - 图形
    - 上底
    - 腰
    - 腰
    - 高
    - 下底
- 分类
  - 一般梯形
  - 等腰梯形
    - 定义
      - 两腰相等的梯形.
    - 性质
      - 两腰相等.
      - 同一底上两角相等.
      - 对角线相等.
      - 是轴对称图形，只有一条对称轴.
    - 判定
      - 两腰相等的梯形.
      - 同一个底上两底角相等的梯形.
      - 对角线相等的梯形.
  - 特殊梯形
    - 直角梯形
      - 定义
        - 有一个角是直角的梯形.
        - 同一腰上的两个角是直角.
      - 性质
        - 高=直角腰.
- 中位线
  - 定义
    - 连结梯形两腰中点的连线.
  - 定理
    - 梯形的中位线平行于两底且等于两底和的一半.
- 面积
  - $S=\frac{(a+b)h}{2}$（a—上底，b—下底，h—高）.
  - $S=lh$（l为梯形中位线长，h为梯形高）.
- 图形的重心
  - 定义
    - 当支撑或悬挂图形时，图形能在水平面处于平衡状态，把支撑点或悬挂点叫重心（或平衡点）.
  - 常见图形的重心
    - 线段的重心是线段的中点.
    - 任意多边形的重心：只有一个，用悬挂法求.
    - 三角形的重心是三边中线的交点.
    - 平行四边形的重心是对角线的交点.

初中数学　第七章　圆　第一节　圆的概念与性质



总结升华

学习误区

弧所对的圆周角与弦所对的圆周角混淆致误.

知能提升

性质运用口诀

圆的证明不算难，常连半径直径看.
有弦可作弦心距，它必垂直平分弦.
直径是圆最大弦，常把90°圆周角添.
它若垂直平分弦，垂径、射影响耳边.
还有与圆有关角，勿忘相互有关联.
圆周、圆心、圆外角，细找弧弦把线连.
同弧圆周角相等，证题用它最多见.

确定圆的条件

平面内不在同一直线上的三点可以且只可以决定一个圆

知识梳理

圆的定义

定义1　在平面内，线段OA绕它固定的一个端点O旋转一周，另一个端点A所形成的图形，其中O叫圆心，OA叫半径.

定义2　到定点的距离等于定长的点的集合.定点叫圆心，定长叫半径.

圆的概念

- 弧：连结圆上任意两点间的部分
  - 优弧：大于半圆的弧.如：$\overset{\frown}{ABC}$
  - 劣弧：小于半圆的弧.如　$\overset{\frown}{BC}$　$\overset{\frown}{AB}$
  - 等弧：同圆或等圆中，能够完全重合的弧.
- 弦：圆上两点之间的线段.
- 弦心距：圆心到弦的距离.
- 直径：过圆心的弦.
- 圆心角：顶点在圆心上的角.
- 圆周角：顶点在圆周上，两边与圆相交的角
- 同心圆：圆心相同，半径不同的圆.
- 等圆：半径相等的圆.

圆的性质

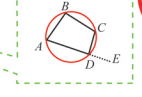
- 对称性
  - 轴对称图形：过圆心的每一条直线都是对称轴.
  - 中心对称图形：圆心是对称中心.
- 垂直于弦的直径
  - 定理：垂直于弦的直径平分弦且平分弦所对的两条弧.
    直径$CD\perp$弦$AB\Rightarrow$(1)CD平分AB　(2)$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$　$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$
  - 推论：平分弦(不是直径)的直径垂直于弦，且平分弦所对的两条弧.

- 圆心角、弦、弧之间的关系
  - 定理：在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，弦相等，弦所对的弦心距相等.
  - 推论：在同圆或等圆中，若两个圆心角、两条弧、两条弦、两条弦的弦心距中有一组量相等，则它们所对应的其余各组量也对应相等.
- 圆周角性质
  - 定理：一条弧所对的圆周角等于它所对圆心角的一半.　$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$

  - 推论
    1. 半圆（直径）所对的圆周角为90°；90°的圆周角所对的弦为直径.
    2. 在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等；相等的圆周角所对的弧相等.

圆内接多边形或多边形外接圆

- 定义：顶点都在同一圆上的多边形.
- 圆内接三角形或三角形外接圆
  - 定义：顶点都在同一圆上的三角形称圆内接三角形，圆心称三角形外心.
  - 性质：外心到各顶点距离相等,是三角形各边的中垂线的交点.
- 圆内接四边形或四边形外接圆
  - 定义：顶点都在同一圆上的四边形.
  - 性质：圆内接四边形对角互补.
    圆内接四边形的外角等于内对角.



学法指导

圆的有关概念

- 确定圆的两个条件
  - 圆心决定圆的位置.　圆心
  - 半径决定圆的大小.　半径
- 正确区分弧、弦、半径、直径等概念
- 与圆环有关的面积问题
  - 圆环：是从一个大圆里面去掉一个小同心圆形成的图形.
  - 圆环的面积=大圆面积－小圆面积.
- 对称性，圆的对称无处不在
  - 对圆的一条直线给出下列五个条件：
    （1）直线垂直于弦；　（2）直线过圆心；
    （3）直线平分弦（不是直径）；　（4）直线平分弦所对的优弧；
    （5）直线平分弦所对的劣弧.
    已知任意两条可推出其余三条

圆的有关性质

- 垂径定理及其推论
  - 1.理解
  - 2.计算线段的长度
    构造圆的半径、弦的一半、弦心距组成的Rt$\triangle AEO$或Rt$\triangle BEO$.
  - 3.逆向运用定理
    确定圆心、半径与圆有关的角.

- 与圆有关的角
  - 1.圆心角与圆周角的关系
    （1）已知同弧或等弧，找所对的角.通常作圆的弦.
    （2）正确利用倍半关系.
    （3）弧所对的角有唯一性，弦所对的角需分类讨论.
  - 2.直径所对圆周角的特征
    （1）作辅助线，构造“直径所对的圆周角是直角”.
    （2）圆周角是直角,其所对的弦是直径.
  - 3.圆外角
    定义：延长圆周角的一边与另一边的夹角.
    性质：如图$\angle A+\angle C=180^\circ$，$\angle CDE=\angle B$.
  - 4.利用弧的度数计算圆周角的度数

初中数学　第七章　圆　第二节　与圆有关的位置关系

总结升华

学习误区

1、与圆的位置关系可从形和数两方面来判断，思维单一容易致误.

2、切线长定理不能与三角函数结合致误.

3、两圆相交时，半径与圆心距的关系考虑不全.

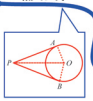
知能提升

常作的辅助线

1.有切线，作过切点的半径.

2.有半径，过端点作圆的切线.

3.有切线长，作以切线、过切点的半径、圆心与圆外的点的连线构成的Rt△PAO 或Rt△PBO.



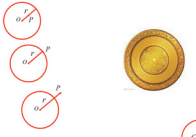
知识梳理

点与圆

点在圆内 $\Leftrightarrow d<r$

点在圆上 $\Leftrightarrow d=r$

点在圆外 $\Leftrightarrow d>r$

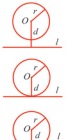


直线与圆

相离 $\Leftrightarrow d>r \Leftrightarrow$ 直线和圆无公共点

相切 $\Leftrightarrow d=r \Leftrightarrow$ 直线和圆只有一个公共点

相交 $\Leftrightarrow d<r \Leftrightarrow$ 直线和圆有两个公共点



圆与圆

d 为圆心距

相交 $\Leftrightarrow R-r<d<R+r$

相切（唯一公共点）

外切 $\Leftrightarrow d=R+r$

内切 $\Leftrightarrow d=R-r$

相离（无公共点）

外离 $\Leftrightarrow d>R+r$

内含 $\Leftrightarrow 0\leqslant d<R-r$

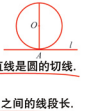
与切线有关的知识

切线

定义：和圆只有一个公共点的直线.

性质定理：圆的切线垂直于过切点的半径.

判定定理：经过半径外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线.



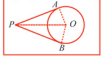
切线长

定义：过圆外一点作圆的切线，这点和切点之间的线段长.

定理：从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等. 圆心和这点的连线平分两条切线的夹角. $PA=PB$, $\angle APO=\angle BPO$.

三角形的内切圆

与三角形各边都相切的圆（又叫圆的外切三角形）. 圆心叫三角形的内心，是三角形任意两条角平分线的交点，它到三边的距离相等.



学法指导

点与圆位置关系

通过计算圆的半径r与点到圆心的距离d的数量关系直接判断.

（1）判定方法：通过计算圆的半径r与直线到圆心的距离d的数量关系.

（2）相切判定

①定义法：与圆只有一个交点的直线.

②数量法：与圆心的距离$d=r$的直线.

③判定定理.

（3）证明直线与圆相切：有明确交点，连半径，证直线与半径垂直. 无明确的交点，过圆心作垂线段，证其等于半径.

（4）切线性质的拓展：已知直线满足：①过圆心；②过切点；③垂直于切线. 可知二推出另一个.

直线与圆位置关系

圆与圆的位置关系

（1）有关两圆位置关系的计算：计算$R+r$，$R-r$与d的关系

（2）判定：直观图形观察

两圆相交：分圆心在公共弦的同侧或异侧.

两圆相切：分外切和内切.

两圆相离：分外离和内含.

（3）实际生活中的多圆问题

抽象出几何图形.

由多圆中两圆或三圆的特性得出整体图形的共性.

三角形的内心与外心

外心

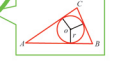
（1）定义：三角形外接圆的圆心或三角形三条中垂线的交点.

（2）性质：外心到三个顶点的距离相等. $OA=OB=OC$，且$\angle AOC=2\angle ABC$.

内心

（1）定义：三角形内切圆的圆心或三角形三条角平分线的交点.

（2）性质：内心到三边的距离相等.



初中数学　第七章　圆　第三节　与圆有关的计算　第四节　正多边形与圆

总结升华

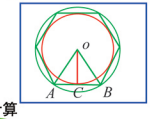
学习误区

- 易记错弧长公式的分母.
- 扇形面积公式易与弧长公式混淆.
- 圆锥的全面积易忽视底面积.
- 正多边形的概念容易混淆，它要求所有边、角都相等.

知能提升

圆与正多边形口诀

经过n等分点作切线，切线相交n个点；
n个交点做顶点，外切正n边形就呈现.
正n边形很美观，它有内切、外接圆；
两圆都是同心圆，它的图形轴对称；
n条对称轴过圆心，n偶中心对称显.
正n边形做计算，边心距、半径成关键；
内切、外接圆半径，边心距原是（内）半径变；分成Rt△$2n$个整，依此计算更简便.



知识梳理

正多边形和圆

- 有关概念
  - 中心：正多边形的圆心.
  - 中心角：正多边形的一边所对的圆心角.
  - 边心距：圆心到各边的距离.
- 关系
  - 圆内接正多边形：取圆上的各等分点，顺次连结各等分点，所组成的多边形叫圆内接多边形.
  - 圆外切正多边形：分别过圆的各等分点作圆的切线，相邻两切线交点组成的正多边形叫圆外切正多边形.
- 性质：正多边形都有一外接圆，反之，同一个圆有无数多个内接正多边形.

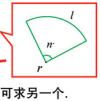
$AC^2+OC^2=AO^2$.

$\angle AOC=\frac{1}{2}$中心角.

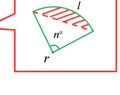
正n边形的半径和边心距，把它分成了$2n$个Rt△AOC.

与圆有关的计算

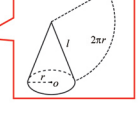
- 弧长公式
  - $l=\frac{n\pi r}{180}$　$(l=\frac{2n\pi r}{360}=\frac{n\pi r}{180})$



  - l，n，r三个变量，已知其中两个就可求另一个.
- 扇（弓）形面积
  - $S=\frac{n}{360}\pi r^2$
  - $S=\frac{1}{2}lr$



  - $S_{弓形}=S_{扇形}-S_{\triangle}$
- 圆锥的侧面积和全面积
  - 圆锥侧面积和全面积：$S_{侧}=\pi lr$，$S_{全}=\pi rl+\pi r^2$.
  - 圆锥展开图



学法指导

求正多边形中元素的值

- 面积计算
  - 作辅助Rt△：边心距、半径、边长的一半.
  - 求三角形的面积.
  - 面积=$2n$个Rt△AOC面积.
- 角的计算

弧长公式的应用

- 结合图形找出弧所对应的半径和圆心角度数.
- 求点的运动路径（几条路径的和）.

扇形面积公式的应用

- 直接求面积.
- 运用公式变形求其他量.

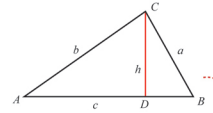
含有扇形的组合图形的面积计算

- 方法
  - 等积变换或割补法.
- 思路
  - 用上述方法，将图形化为规则图形利用公式求解.

圆锥的面积

- 应用面积公式计算
  - 求侧面积和全面积.
  - 公式变形求圆锥有关的角和线段长.
- 求几何体上两点的最短距离
  - 作侧面展开图.
  - 在展开图中找出表示最短距离的线段.
- 应用于实际生活
  - 求制作实物的用料.
  - 讨论设计方案的可行性.

初中数学　第八章　相似与投影　第一节　相似三角形



$\triangle ACB \backsim \triangle ADC \backsim \triangle BDC$

$AC^2 = AD \cdot AB$

$BC^2 = BD \cdot BA$

$CD^2 = AD \cdot DB$

面积关系：$ab=ch$

总结升华

学习误区

①相似三角形的对应边找错.

②位似比对扩大与缩小的影响不明确.

③面积比与相似比的关系不明确.

知能提升

1、切记相似三角形的边角对应关系.

2、在应用相似三角形时，要注意方法的选择：①先是两角；②已知两边成比例必须考虑另一边成比例或夹角相等；③直角三角形的特殊方法.

3、等积式或比例式基本解题思路口诀：

遇等积，化比例，横找竖找定相似；

不相似，莫要急，等线等比来代替；

遇等比，改等积，引用射影和圆幂；

平行线，转比例，两端各自找联系.

学法指导

判断多边形的相似

1.判断对应边是否成比例.

2.判断对应角是否相等.

两条都成立，则相似，否则不相似.

判断三角形相似

在几何图形中找三角形相似

1.若有平行线，直接得出三角形相似.

2.若无平行线，按判定方法逐个判断.

3.找题目隐含条件，如公共角、对顶角等.

注意：三角形相似具有传递性.

在正方形的网络中确定三角形相似

结合三角形的性质，确定三角形各角度数.

结合勾股定理，确定三角形各边长.

已知三角形相似，探索使结论成立的条件

运用三角形相似的方法得出结论.

逆向思维，依据仍是三角形判定条件.

探索得出的条件不唯一，但只要相似的条件即可

利用图形相似进行计算

利用比例尺，计算地图或实际图形中的线段长或面积大小.

根据相似比，确定相似形的周长和面积.

通过相似列出比例式，运用方程思想，确定边长.

通过相似求线段间的比值.

常作辅助线是平行线

过三角形一边（或延长线）上的特殊点作另一边的平行线.

三角形的中线：过中点作边的平行线；或延长中线一倍，构造平行四边形.

三角形的角平分线：过交点作另一边的平行线.

证明等比式或等积式

证等积式

三点定型法确定相似三角形.

证比例中项

证有公共边（或等边）的两个三角形相似，公共边（或等边）分别是其他两边的比例中项.

Rt△的射影定理.

若涉及的三条线段不在两个三角形内，则可利用相等线段进行转换.

证平方比

利用相似三角形的面积比等于相似比的平方证明.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{且} \frac{a}{b}=\frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}=\frac{ce}{df}$$

利用相似形测量物体的高（或宽）

知识梳理

相似形

定义：对应边的比相等，对应角相等的两个图形.

性质：对应边、对应中线、对应角平分线、对应高线、对应周长的比等于相似比；面积之比等于相似比的平方.

有关概念

相似比：相似多边形对应边的比.

成比例线段：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，a，b，c，d叫成比例线段.

相似三角形的判定

两角对应相等的两三角形相似.

两边对应成比例，夹角相等的两三角形相似.

三边对应成比例的两三角形相似.

平行于三角形一边的直线和其他两边（或两边延长线）相交所构成的三角形与原三角形相似.

Rt△相似

判定

1.斜边和一直角边对应成比例的两直角三角形相似.

2.有一组锐角相等的两个直角三角形相似.

结论

Rt△斜边上的高分成的两个Rt△与原Rt△相似.

相似三角形的性质

对应角相等，对应边成比例

对应高线、中线、角平分线的比等于相似比.

周长之比等于相似比.

面积之比等于相似比的平方.

位似图形

这个点就是位似中心

构成位似图形满足的条件

1.两个图形是相似形.

2.每对对应点所在的直线都经过同一点.

性质

两个位似图形一定相似

位似图形上的任意一对对应点到位似中心的距离之比等于位似比.

位似图形对应点的连线（或延长线）都交于一点.

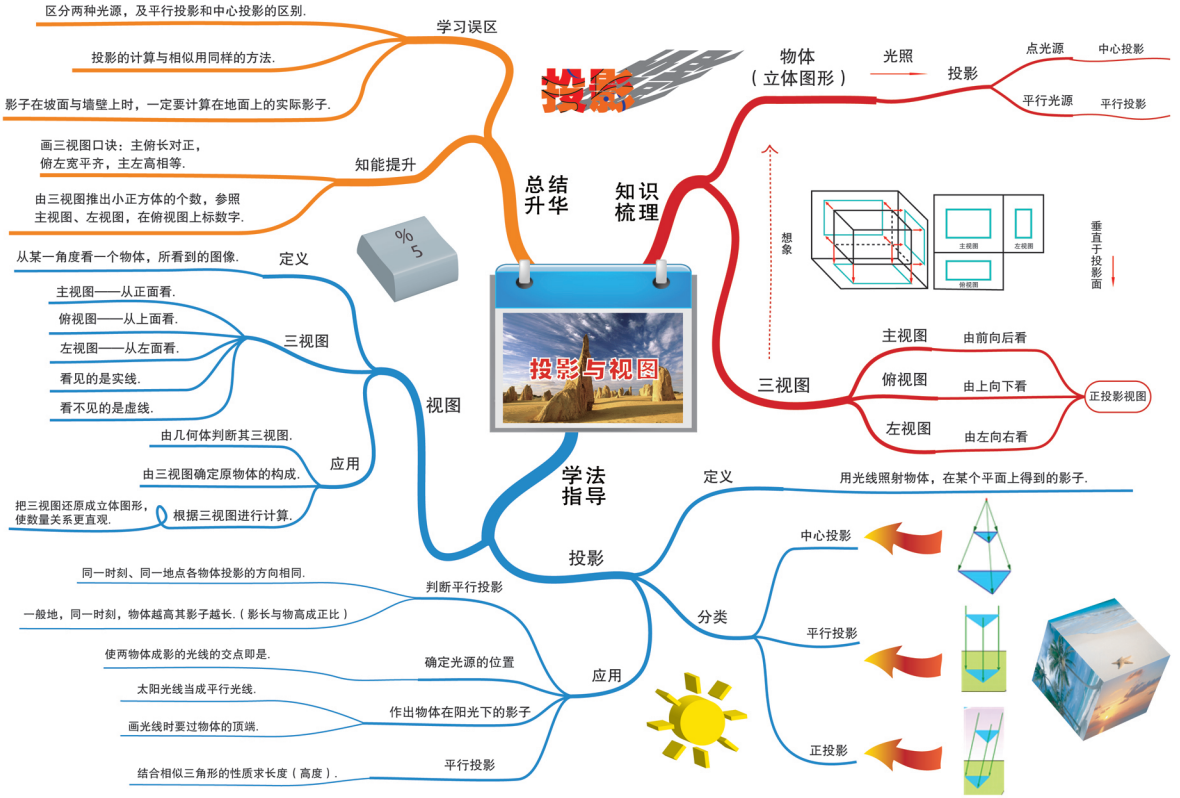
位似图形的对应线段平行且成比例.

位似图形的对应角相等.

应用

利用位似可以将一个图形放大或缩小.

初中数学　第八章　相似与投影　第二节　投影与视图



初中数学　第九章　图形与变换　第一节　图形的对称

总结升华　知识梳理

学习误区

（1）误认为，中心对称图形都是轴对称图形，
如平行四边形是中心对称图形，但不是轴对称图形.

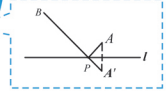
（2）判断一个图案是否是轴对称或中心对称图形，
往往只注意复合图案中较大的图案，
而忽视了这个图案中较小图案的对称性.

（3）不能正确运用图形的对称性，将有关的线段集中
（转换）在一个三角形中来运用勾股定理求解.

知能提升

（1）图形的对称变换是全等变换，要抓住“全等形”
得出有关的线段相等，有关的角相等.

（2）对于求两条线段和的最短距离的问题，一般方法是，
将其中一点A（线段端点）作某一直线的对称点A'，例如，
如图所示，在直线l上求一点P，使$PA+PB$的距离最短，过
点A作直线l的对称点A'，连BA'交直线于P，则P为所求.
注意：在一般综合题中，如果有类似问题.
可采取上述方法，再构造直角三角形，
用勾股定理解之.



轴对称

- 定义：两个图形沿一条直线折叠后能够完全重合，就说这两个图形成轴对称，这条直线叫做对称轴.
- 轴对称图形定义：如果一个图形沿一条直线对折后，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形就叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴.
- 性质：如果两个图形关于某一条直线对称，那么对应线段相等，对应角相等，对应点连线被对称轴垂直平分.
- 轴对称变换
  - 全等变换：在图形的全等变换下，线段、角大小不变.

中心对称

- 定义：把一个图形绕着某个点旋转180度后，如果它能够和另一个图形重合，那么这两个图形成中心对称，这个点叫做对称中心.
- 中心对称图形定义：某个图形绕着一个定点旋转180度后，能与自身重合的图形叫做中心对称图形，这个点叫做对称中心.
- 性质
  - (1)连结中心对称的两个图形的对称点，所连线段经过对称中心，而且被对称中心平分.
  - (2)中心对称的两个图形全等.

学法指导

正确理解有关的定义

(1)正确理解轴对称和轴对称图形.

(2)正确理解中心对称和中心对称图形.

理解全等变换

轴对称和中心对称都是全等变换，
正确应用全等变换的性质.

常见轴对称图形及对称轴条数

线段有一条对称轴；角有一条对称轴；
等腰（非等边）三角形有一条对称轴；
等边三角形有三条对称轴；
等腰梯形有一条对称轴；
矩形有两条对称轴；
菱形有两条对称轴；
正方形有四条对称轴；圆有无数条对称轴；正n边形有n条对称轴.

常见中心对称图形

平行四边形，矩形，菱形，正方形，圆，线段.
正偶数多边形（如正方形，正六边形等）.

作对称图形

- 作轴对称图形：关键是先确定对称轴，或者作完图后，能否找到它的对称轴.
- 作中心对称图形：关键是先确定对称中心，或者作完图后，能否找到它的对称中心.

初中数学　第九章　图形与变换　第二节　图形的平移与旋转

总结升华

学习误区

(1)不能正确认识旋转的现象，如把“行进中的自行车车轮的运动”误认为旋转.

(2)不能正确认识旋转中的旋转角.

(3)在解答有关平移、旋转问题时，不能充分运用平移、旋转是全等变换这个思想方法，没有找出有关相等线段或相等的角.

知能提升

(1)运用平移、旋转的性质求线段和角时，可转化为利用全等三角形的性质等进行证明.

(2)根据解题需要，我们将某一图形（或图形的一部分）绕某定点旋转一个定角（60°或90°等），使某些元素（线段或角）相对集中（构造一个三角形），以利于问题的解决，我们称这种方法为“旋转变换”.

(3)运用“旋转变换”，解决问题的基础条件是有一组对应边相等，作旋转变换时，一定要指明旋转中心，被旋转的图形，旋转方向，旋转的角度，旋转到什么位置.

知识梳理

图形的平移

- 定义：某一基本的平面图形沿某个方向移动一定距离，这种图形的平行移动叫做图形的平移.
- 性质：经过平移，对应线段、对应角分别相等，所连对应点线段平行且相等，图形大小、形状不变.
- 平移变换：全等变换

图形的旋转

- 定义：把一个平面图形绕着平面内某一点O转动一个角度就叫做图形的旋转，点O叫做旋转中心，转动的角叫做旋转角.
- 性质：
  - (1)对应点到旋转中心的距离相等.
  - (2)对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角.
  - (3)旋转前后的图形全等.
- 旋转的特例：中心对称　中心对称图形
- 旋转变换：全等变换

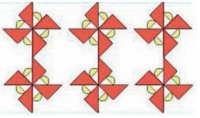
学法指导

理解全等变换

平移变换、旋转变换都是全等变换，其性质也可以根据全等的性质去归纳和理解记忆.

解决平移问题的关键

先是找准平移前后图形中的对应点，然后利用平移的性质来解决.



解决旋转问题的关键

先找出旋转角，即对应点，然后利用旋转的性质去解决.

探索基本图形之间的变换关系

进行图案设计，欣赏并体验平移、旋转（或轴对称）在现实生活中的应用.

初中数学　第九章　图形与变换　第三节　图形的变换与坐标

总结升华

知识梳理

- 对称点的坐标特征
  - (1)点A（a，b）关于x轴的对称点A'为（a，$-b$）.
  - (2)点A（a，b）关于y轴的对称点A'为（$-a$，b）.
  - (3)点A（a，b）关于原点O的对称点A'为（$-a$，$-b$）.
- 同形的变换
  - 平移变换
  - 旋转变换
  - 折叠变换
  - 对称变换
  - 全等变换

学习误区

- 图形变换
  - （1）在解图形变换（平移、旋转、翻折）题时，对全等变换中相等量（相等线段、相等的角）把握不准确，运用不到位，没有起到“过渡”或“转换”的作用.
- 图形平移
  - （2）图形在平移时，容易忽视对应点的连线平行且相等.
- 图形旋转
  - （3）图形在旋转时，容易忽视对应线段夹角相等.
- 图形翻折
  - （4）图形在翻折前后，对应点的连线的垂直平分线是对称轴，这一点也很容易忽视.

知能提升

- 运动角度
  - （1）在图形的平移、旋转、轴对称的题目中，要重视用运动的观点来分析图形，特别要重视运动过程中，点、线段、角变化规律（即变中变）与点、线段、角的不变量（即变中不变）.寻找变化规律时，将题目中的条件集中在一个图形中，通过勾股定理、相似三角形、面积公式、等积变形，建立方程.
- 特殊图形
  - （2）要善于寻找压轴题的“题眼”和“题根”、题眼有时在某一个特殊图形中（如一对相似三角形，其中直角三角形、特殊角、特殊三角形、特殊四边形等），“题根”有时在某个思想方法中（如分类讨论问题中等）.

学法指导

- 根据图形的变换求点的坐标
  - 要紧扣图形变换的特征，利用全等变换的特征先求该点到两坐标轴的距离，然后根据坐标系中象限点的符号特点，求出该点的坐标.
- 在坐标系中画变换的图形
  - 必须先确定对应点变换后的坐标，然后画出图形.
- 图形变换的综合题
  - 将以图形的平移、旋转、折叠、对称等变换作为命题的特点，突出考查学生的观察能力、思维能力以及动手操作能力，考查学生代数、几何知识的综合运用能力.

初中数学　第十章　锐角三角函数　第一节　锐角三角函数

总结升华

知能提升

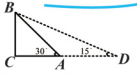
- 公式记忆
  - 弦的平方和为1　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$
  - 弦的商为切　$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$
  - 切的积为1　$\tan A\cdot\cot A=1$
- 记忆方法
  - 30°，45°，60°
    正弦、余弦值的分母都是2；
    分子分别是：$\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3};\sqrt{3},\sqrt{2},\sqrt{1}$.
  - 正 切、余切值的分母都是 3
    分子分别是：$\sqrt{3},\sqrt{9},\sqrt{27};\sqrt{27},\sqrt{9},\sqrt{3}$.
- 由增减性来比较大小
  - $0<\sin A<1$
  - $0<\cos A<1$
  - $\sin A=\cos(90^\circ-A)$

学习误区

- 三角函数的定义中，没有注意边与边的对应关系.
- 特殊角的值记错.
- 正弦、余弦的互换关系记错（没考虑到互余关系）.

学法指导

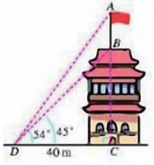
- 特殊角的三角函数值
  - 应用：求 15°、75° 三角函数值.



三角函数值

三角函数	0°	30°	45°	60°	90°
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tanα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	\
cotα	\	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- 求一般锐角的三角函数值
  - 借助计算器或锐角三角函数表
- 同一锐角的三角关系
  - 化简
  - 求值
    - 已知锐角 A 的三角函数，求 A.
- 比较两个函数值的大小
  - 同名函数
    - 利用单调性比.
  - 互余函数
    - 利用互余关系，化为同名函数.
- 三角函数取值范围的探究
  - $\tan\alpha>0$
  - $0<\cos\alpha<1$
  - $0<\sin\alpha<1$

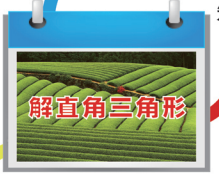


知识梳理

- 定义
  - 锐角 A 的正弦，余弦，正切，余切合称为 $\angle A$ 的锐角三角函数.
  - $\angle A$ 的正弦　$\sin A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}$
  - $\angle A$ 的余弦　$\cos A=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}$
  - $\angle A$ 的正切　$\tan A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{邻边}}=\frac{a}{b}$
  - $\angle A$ 的余切　$\cot A=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{对边}}=\frac{b}{a}$

- 三角函数的性质
  - 锐角A的三角函数值范围
    - $0<\sin A<1$
    - $0<\cos A<1$
    - $\tan A>0$
    - $\cot A>0$
  - 锐角三角函数的增减性（$0^\circ<A<90^\circ$）
    - $\sin A$.$\tan A$ 都随∠A的增大而增大，减小而减小.
    - $\cos A$，$\cot A$ 都随 $\angle A$ 的增大而减小，减小而增大.
  - 同一锐角 A 的三角函数
    - 平方关系　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$
    - 商数关系　$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$
    - 倒数关系　$\tan A\cdot\cot A=1$
  - 互余两角之间的函数关系
    - $\sin A=\cos(90^\circ-A)$
    - $\cos A=\sin(90^\circ-A)$
    - $\tan A=\cot(90^\circ-A)$
    - $\cot A=\tan(90^\circ-A)$
  - 特殊角的三角函数值
    - 含 30°、45°、60° 及 0°、90° 的三角函数值.

初中数学　第十章　锐角三角函数　第二节　解直角三角形



总结升华

学习误区

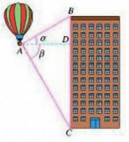
- 不能正确找出直角三角形的边角关系.
- 构造图形不正确导致错误.
- 俯角、仰角、方位角、坡度与坡角的概念不清楚.

知能提升

- 由已知和未知来选择辅助线的作法，目的是构造解直角三角形的条件.
- 应用中的常见模型
  - 计算型
  - 边角型
  - 实际应用型

学法指导

- 具体应用
  - 方案决策问题.
  - 范围选择问题.
  - 工程建设问题.
  - 常以航海为背景，求距离.
  - 自上而下观察物体，确定被测物高度.
  - 由测量地点及仰角的变化，确定被测物高度.



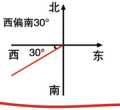
知识梳理

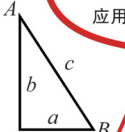
- 定义
  - 在直角三角形中，由已知元素求未知元素的过程.
- 常用的边角关系
  - 勾股定理　$a^2+b^2=c^2$
  - 角的关系　$\angle A+\angle B=90^\circ$
  - 边角关系
    - $\sin A=\frac{a}{c}$
    - $\cos A=\frac{b}{c}$
    - $\tan A=\frac{a}{b}$

- 求解Rt△
  - 已知一边一角
  - 已知两边
- 应用
  - 仰角、俯角

  - 坡度与坡角

    - 坡角：坡面与水平面的夹角α.
    - 坡度i：坡面的垂直高度h与水平宽度l的比.
  - 方位角





应用

- Rt△解法
  - 基本类型
    - 已知两边
      - 利用 $a^2+b^2=c^2$，求第三边.
      - 利用边角关系，求其中一角.
      - 利用$\angle A+\angle B=90^\circ$，求另一角.
    - 已知一边一角
      - 利用$\angle A+\angle B=90^\circ$，先求另一角.
      - 利用边角关系，求其他的两边.
      - (或求出一边后，利用 $a^2+b^2=c^2$，求第三边.)
  - 实际应用
    - 开放性问题
    - 坡度、坡角问题
    - 方位角的问题
    - 仰角、俯角有关问题
- 边角关系的应用
  - 已知两边，求另一边：$a^2+b^2=c^2$.
  - 已知一角，求另一角：$\angle A+\angle B=90^\circ$.
  - 边角关系：两边可求角，一边一角可求另一边.
  - $\sin A=\frac{a}{c},\cos A=\frac{b}{c},\tan A=\frac{a}{b},\cot A=\frac{b}{a}$
- 在其他图形中的应用
  - 计算多边形的面积.
  - 解斜三角形.
  - 利用三角函数进行复杂的多边形计算.

初中数学　第十一章　统计与概率　第一节　统计

总结升华

学习误区

- 总体、样本的概念混乱.
- 分不清集中趋势和离散趋势.
- 弄不清三种统计图的表达意义的侧重点.

知能提升

- 1、认真理解各个基本概念的实质，找出区别与联系.
- 2、理解各个统计量的作用，使分析数据更具有方向性.
- 3、注意题目的侧重点来选取合适的知识解题.

知识梳理

统计的相关概念

- 总　体　在统计中，所有考察对象的全体.
- 个　体　在统计中，组成总体的每一个考察对象.
- 样　本　在统计中，实际观测或调查的那部分个体.
- 样本容量　在统计中，所提取的样本个数.

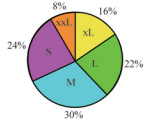
数据的收集与整理

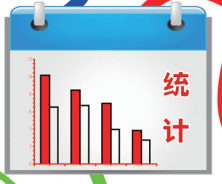
- 统计图表
  - 扇形统计图.
  - 条形统计图.
  - 折线统计图.
  - 频率分布表.
  - 直方图.
- 调查的方式
  - 普查　为了一定的目的，对考察对象进行全面的调查.
  - 抽样调查　从总体中，抽取部分个体进行调查的方式.

分析数据

$x_1, x_2, \ldots, x_n$　n个数据

- 平均数
  - 算术平均数　$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$
  - 加权平均数　$\bar{x}=\frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$　（w_1，w_2，$\cdots$，w_n分别是n个数据的“权”.）
- 中位数　n个数据按大小顺序排列，处于中间位置的一个数据（或中间两个数据的平均数）.
- 众数　一组数据中，出现次数最多的那个数（注：有时会有多个）.
- 极差　一组数据中，最大与最小数据的差.
- 方差　$s^2=\frac{1}{n}\left|(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2\right|$
- 标准差　$s=\sqrt{\frac{1}{n}}\left|\sqrt{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}\right|$





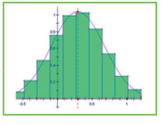
学法指导

样本估计总体的方法

即通过从总体中抽取一个样本，根据样本的情况去估计总体的相应情况，常用于设计实际应用题.

画统计图

- 画频率分布直方图的步骤
  - 1.收集数据；（放在统计图内）
  - 2.计算数据中的最大值与最小值的极差；
  - 3.确定组距与组数；
  - 4.确定分点；
  - 5.列频率分布表；
  - 6.画直方图；
  - 7.写出统计图的名称和数据来源.
- 画频数分布折线图的方法
  - 取直方图中每个矩形上边的中点，把这些点用线段依次连结起来即可.

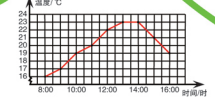


平均数、众数和中位数区别

- 平均数的大小与每一个数据有关，任一数据的变动都会引起平均数的变动.
- 众数的大小只与数据中的部分数据有关.
- 中位数只与数据的排列位置有关，某些数据的变动对它没有影响.

极差、方差与标准差

它们都是衡量一组数据波动大小的量.这三个量越小，这组数据的波动越小，也就越稳定；反之亦然.



数形结合法

利用统计量解决实际问题

- 常见的命题形式
  - (1)观察分析各类统计图表，解决相关问题.
  - (2)根据已知条件，绘制或补全各类统计图.
- 1.比赛成绩的评估.
- 2.植物长势的判断.
- 3.对事件提出合理化的建议.

初中数学　第十一章　统计与概率　第二节　概率

总结升华

学习误区

- 概率与频率的关系不清楚致误
  - 1. 频率是概率的近似值，随着试验次数的增加，概率会越来越接近频率值.
  - 2. 频率本身是随机的，在试验前不能确定.
  - 3. 概率是一个确定的常数，是客观存在的，与试验次数无关.

知能提升

- 列表法选用的条件
  - 一次试验涉及两个因素且可能结果较多时，多用列表法.
- 树状法选用的条件
  - 一次试验涉及三个或更多个因素时，一般选树状法
- 用频率估计概率
  - 频率必须是大量重复试验中的稳定值.

学法指导

事件

- 区分
  - 概率为1的是必然事件.
  - 概率为$P(A)$（$0<P(A)<1$），A为随机事件.
  - 概率为0的是不可能事件.
- 分类
  - 确定事件
    - 必然事件
    - 不可能事件
  - 随机事件

概率计算

- 公式
  - $P(A)=\frac{m}{n}$（n是所有可能情况，m是事件A的可能情况）.
- 其他
  - 列举法（数据较少，一一列举）
  - 列表法（两步问题）
  - 树状法（三步以上问题）
  - 不重不漏地列出所有可能结果

注意问题

- 有（无）放回问题
  - 是否重复
- 同步问题
  - 选择方法

常见的模型（见知识梳理5）

知识梳理

1.概率定义

- 刻画事件发生的可能性大小的量.

2.事件

- 确定事件
  - 必然事件　在一定条件下，一定发生的事件.
  - 不可能事件　在一定条件下，不可能会发生的事件.
- 随机事件　在一定条件下，可能发生、也可能不发生的事件.

3.事件的概率

- P(必然事件)=1
- P(不可能事件)=0
- $0<P$(随机事件)<1

4.求概率的方法

- 概率的计算公式$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件}A\text{包含的可能结果数}}{\text{所有可能结果的总数}}$
- 树状图法　两步及以上
- 列表法　两步
- 列举法　数据较少

5.概率应用中的常见模型

- 双转盘模型
- 抛硬币模型
- 单转盘模型
- 有(无)放回摸球型
- 掷骰子模型